Digitalna vezja
UL, FRI

Vaja 5 Funkcijsko poln sistem, Zaprti razredi

Funkcijsko poln sistem (FPS) in ugotavljanje FPS

- Nabor operatorjev je funkcijsko poln, če z njim lahko izrazimo vsako funkcijo.

  Nabor operatorjev disjunkcije, konjunkcije in negacije {OR, AND, NOT}, $\{\vee, \cdot, ^{-}\}$, je funkcijsko poln sistem (operator $^{-}$ predstavlja negacijo).

- Kako lahko pokažemo, da je nek nabor funkcij FPS?

  1. **Prevedba**:
     - Če lahko z nekim naborom funkcij izrazimo že znan FPS, npr. $\{\vee, \cdot, ^{-}\}$, potem je tudi ta nabor FPS.
     - S pretvorbo lahko hitro dokažemo, da je nek nabor FPS, težko pa z njo dokažemo, da nek nabor ni FPS, saj mogoče le mi ne najdemo pretvorbe na že znan FPS!

  2. **Z uporabo osnovnih zaprtih razredov (Postov teorem funkcijske polnosti)**

Primer 1: {↓} prevedba na OR, AND, NOT

S pretvorbo na negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo pokaži, da je Peircov operator (↓) FPS!

Negacija (NOT):

$$\bar{x} = \overline{x \vee x} = x \downarrow x$$

Disjunkcija (OR):

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$$

Konjunkcija (AND):

$$x_1 . x_2 = \overline{\overline{x_1 . x_2}} = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} = (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$$

S Percovim operatorjem smo uspešno izrazili negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo in tako pokazali, da je Peircov operator FPS.

Osnovni zaprti razredi in preverjanje FPS s pripadnostjo osnovnim zaprtim razredom

- Osnovni **zaprti razredi**:
  - T_0 - razred preklopnih funkcij, ki ohranjajo ničlo
  - T_1 - razred preklopnih funkcij, ki ohranjajo enico
  - S – razred sebidualnih funkcij
  - L – razred linearnih funkcij
  - M – razred monotonih funkcij

- **Funkcijska polnost nabora** preklopnih funkcij - preverjamo jo s **pripadnostjo osnovnim zaprtim razredom** (Postov teorem funkcijske polnosti).
  - Nabor **je POLN**, če **odpira** vse osnovne razrede.
  - Nabor odpira osnovni razred, če **vsaj ena funkcija NE** pripada temu razredu.

Primer 2: Ali je $\{\rightarrow, 1\}$ FPS?

	T_0	T_1	S	L	M
$\rightarrow$	$\notin$	$\in$			
1	$\notin$	$\in$			

Z uporabo osnovnih zaprtih razredov preverite, ali je nabor $\{\rightarrow, 1\}$ FPS!

$$f(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

1) Razred T_0: $\boldsymbol{f(0,0,\dots,0) = 0}$

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	1	$f(x_1, x_2)$
0	0	1	1	$f(0,0)$
0	1	1	1	$f(0,1)$
1	0	0	1	$f(1,0)$
1	1	1	1	$f(1,1)$

$\rightarrow$: $f(0,0) = \bar{0} \vee 0 = 1$

1: $1 \neq 0$

$\boxed{\rightarrow \notin \boldsymbol{T_0}}$

$\boxed{1 \notin \boldsymbol{T_1}}$

2) Razred T_1: $\boldsymbol{f(1,1,\dots,1) = 1}$

$\rightarrow$: $f(1,1) = \bar{1} \vee 1 = 1$

1: $1 = 1$

$\boxed{\rightarrow \in \boldsymbol{T_0}}$

$\boxed{1 \in \boldsymbol{T_1}}$

	T_0	T_1	S	L	M
→	∉	∈	∉		
I	∉	∈	∉		

Primer 2: Ali je $\{\rightarrow, 1\}$ FPS?

3) Razred S: $\overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

→: ***1. Analitično:*** $\overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = f(x_1, x_2)$

$$\overline{\overline{x_1} \rightarrow \overline{x_2}} = x_1 \rightarrow x_2$$

$$\overline{\overline{\overline{x_1}} \vee \overline{x_2}} = \overline{x_1} \vee x_2$$

$$\overline{x_1}.x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

$$= \overline{x_1}.(x_2 \vee \overline{x_2}) \vee x_2(x_1 \vee \overline{x_1})$$

$$= \overline{x_1}.x_2 \vee \overline{x_1}.\overline{x_2} \vee x_1.x_2$$

$$\vee^2(1) \neq \vee^2(0,1,3)$$

preverimo enakost -desno stran dopolnimo do PDNO

$\boxed{\rightarrow \notin S}$

2. Tabelarično: $f(\vec{w}_i) \neq f(\vec{w}_{2^n-1-i})$

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$f(x_1, x_2)$
0	0	1	$f(w_0)$
0	1	1	$f(w_1)$
1	0	0	$f(w_2)$
1	1	1	$f(w_3)$

$f(w_0) = f(w_3)$

$f(0,0) = f(1,1)$, protiprimer

1: $\overline{1} = 1$,

$0 \neq 1$ (protislovje)

$\boxed{1 \notin S}$

	T_0	T_1	S	L	M
→	∉	∈	∉	∉	
1	∉	∈	∉	∈	

Primer 2: Ali je { →, 1} FPS?

4) Razred L: $\boldsymbol{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L; f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \nabla a_1 . x_1 \nabla a_2 . x_2 \nabla \dots \nabla a_n . x_n}$

→: ***I. Analitično:***

i. Predpostavimo, da funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spada v razred L.

$$f(x_1, x_2)_L = x_1 \to x_2 = a_0 \nabla a_1 . x_1 \nabla a_2 . x_2$$

ii. Določimo koeficiente $a_0, a_1, \dots, a_n$.

$$f(0,0)_L = a_0 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 0 = 1 \qquad (a_0 = 1)$$

$$f(0,1)_L = 1 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 1 = 1 \nabla a_2 = 1 \quad (a_2 = 0)$$

$$f(1,0)_L = 1 \nabla a_1 . 1 \nabla a_2 . 0 = 1 \nabla a_1 = 0 \quad (a_1 = 1)$$

$$f(x_1, x_2)_L = 1 \nabla 1 . x_1 \nabla 0 . x_2 = 1 \nabla x_1$$

iii. Preverimo ali se dobljena funkcija $a_0 \nabla a_1 . x_1 \nabla a_2 . x_2 \nabla \dots \nabla a_n . x_n$ ujema s podano funkcijo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$f(1,1) = \overline{1} \vee 1 = 1$$

$$f(1,1)_L = 1 \nabla x_1 = 1 \nabla 1 = 0$$

$$f(1,1) \neq f(1,1)_L$$

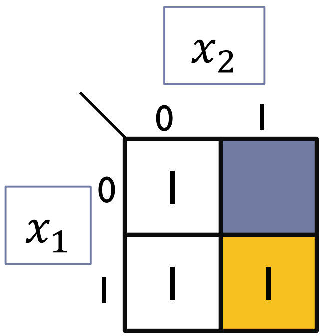
$\boxed{\to \notin L}$

	T_0	T_1	S	L	M
→	∉	∈	∉	∉	
1	∉	∈	∉	∈	

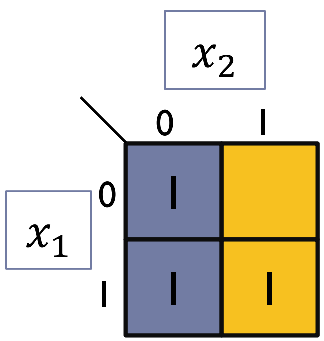
Primer 2: Ali je $\{\rightarrow, 1\}$ FPS?

→: **2. s *Karnaughjevim* diagramom (pokritja):**

Primerjamo posamezna pokritja → veljati mora popolna enakost ali popolna različnost



$\overline{x_1}.x_2$: $\overline{x_1}.\overline{x_2}$ (popolnoma različna)



$\boldsymbol{\overline{x_1}}$: $\boldsymbol{x_1}$ (niti popolnoma različna, niti popolnoma enaka)

→ ∉ L

	T_0	T_1	S	**L**	**M**
$\rightarrow$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
1	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

Primer 2: Ali je $\{\rightarrow, 1\}$ FPS?

5) Razred M: $\boldsymbol{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M;\ \forall\, i, j,\ \vec{w}_i < \vec{w}_j \rightarrow f(\vec{w}_i) \leq f(\vec{w}_j)}$

Za w_i in w_j velja, da je $\boldsymbol{w_i < w_j}$, če za vsako mesto k velja $\boldsymbol{w_{k,i} \leq w_{k,j}}$ (na vseh istoležnih bitih velja $\leq$).

Za preverjanje pripadnosti monotonosti **primerjamo sosedne vektorje** (razlikujeta se samo na enem mestu).

Primer: za n= 4, w_0 : (0,0,0,0)

w_4 : (0,1,0,0) $w_0 < w_4$

$\rightarrow$:

Sosedni vektorji:

$w_0 < w_1, w_0 < w_2$

$w_1 < w_1$

$w_2 < w_3$

	x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$f(x_1, x_2)$
w_0	0	0	**1**	$\boldsymbol{f(w_0)}$
w_1	0	1	1	$f(w_1)$
w_2	1	0	**0**	$\boldsymbol{f(w_2)}$
w_3	1	1	1	$f(w_3)$

V tabeli ugotovimo, da je $w_0 < w_2, f(w_0) \nleq f(w_2)$

$(0{,}0) < (1{,}0)\ ;\ f(0{,}0) \nleq f(1{,}0)$

$\boxed{\rightarrow \notin \mathrm{M}}$

Primer 2: Ali je $\{\rightarrow, 1\}$ FPS?

	T_0	T_1	S	L	M
$\rightarrow$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
1	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

Ugotovili smo, da nabor $\{\rightarrow, 1\}$ **NI FPS**, saj razreda T_1 NE odpre nobena funkcija. Pri vseh ostalih razredih je vsaj ena funkcija, ki razredu ne pripada.

- Kako bomo dopolnili nabor operatorjev, da bo funkcijsko poln?

  Dodamo operator negacije ali konstanto 0, ker ena in druga odpirata razred T_1, in tako dobimo funkcijsko poln sistem.

Primer 3: Ali je V^3 (0,3,4,6) FPS?

	T_0	T_1	S	L	M
f	$\notin$	$\notin$	$\notin$		$\notin$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

T_0: $f(0,0,0) = 1 \Rightarrow f \notin T_0$

S: protiprimer: $f(0,1,0) = f(1,0,1) \Rightarrow f \notin S$

T_1: $f(1,1,1) = 0 \Rightarrow f \notin T_1$

M: protiprimer: $(1,1,0) < (1,1,1)$; $f(1,1,0) \nleq f(1,1,1) \Rightarrow f \notin M$

	T_0	T_1	S	L	M
f	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Primer 3: Ali je V^3 (0,3,4,6) FPS?

L (analitično):

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

f(x_1,x_2,x_3)$_L$=$a_0 \nabla a_1 . x_1 \nabla a_2 . x_2 \nabla a_3 . x_3$		f(x_1,x_2,x_3)$_L$
f$(0,0,0)_L$=$a_0 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 0 \nabla a_3 . 0 = 1$	$a_0 = 1$	1
f$(0,0,1)_L$=$1 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 0 \nabla a_3 . 1 = 0$	$1 \nabla a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 1$	0
f$(0,1,0)_L$=$0 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 1 \nabla a_3 . 0 = 0$	$1 \nabla a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$	0
		1
f$(1,0,0)_L$=$1 \nabla a_1 . 1 \nabla a_2 . 0 \nabla a_3 . 0 = 1$	$1 \nabla a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$	1
		0
		0
		1

f(x_1,x_2,x_3)$_L$=$1 \nabla 0 . x_1 \nabla 1 . x_2 \nabla 1 . x_{3.} = 1 \nabla x_2 \nabla x_3$

Preverimo preostale vhodne vektorje - vstavimo zapis funkcije f(x_1,x_2,x_3)$_L$ v tabelo.

$$f(1,1,0) = 1$$

$$f(1,1,0)_L = 1 \nabla 1 \nabla 0 = 0$$

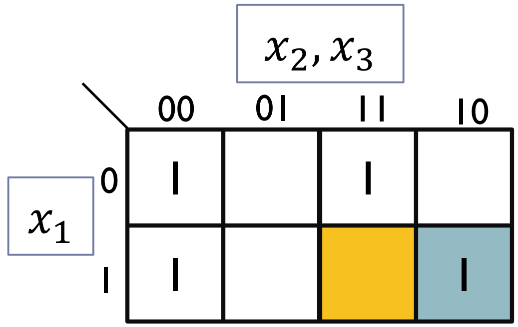
$$f(1,1,0) \neq f(1,1,0)_L$$

$f \notin$ L

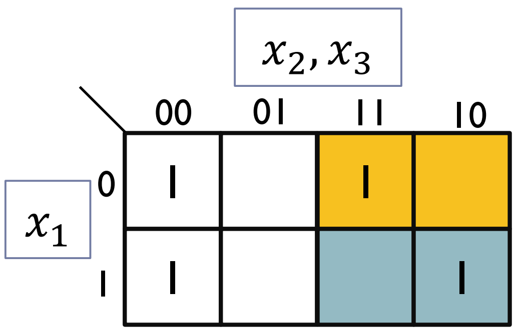
	T_0	T_1	S	L	M
f	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

Primer 3: Ali je V^3 (0,3,4,6) FPS?

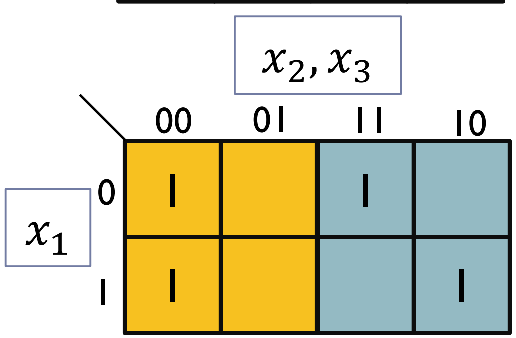
L (s **Karnaughjevim diagramom** - pokritja):



$\overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3$: $\overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3}$ (popolnoma različna)



$\overline{x_1}.x_2$: $\overline{x_1}.\overline{x_2}$ (popolnoma različna)



$\boldsymbol{\overline{x_1}}$: $\boldsymbol{x_1}$ (niti popolnoma različna, niti popolnoma enaka)

Naloga

1. S pretvorbo na negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo pokaži, da je nabor operatorjev $\{\nabla, \cdot, 1\}$ funkcijsko poln sistem!

2. Podana je preklopna funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&^4(1,6,7,9,14,15)$.

   a) Preveri pripadnost zaprtim razredom T_0, T_1, S in M.
   b) Pripadnost razredu L preveri analitično in s Karnaughjevim diagramom.
   c) S Karnaughjevim diagramom določi MNO funkcije.
   d) MNO realiziraj v Logisimu in na protoboardu.