1. VEKTORJI IN MATRIKE

$\mathbb{R}$: $0, 1, \pi, \sqrt{3}, \ldots$

št. komponent

$\mathbb{R}^n$: $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, [1], \begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\\pi\\0\\-3\\2\end{bmatrix}$ ← vektorji

$\cap|$

št. vrstic matrike, št. stolpcev

$\mathbb{R}^{m\times n}$: $\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2&3&4\\\pi&-\sqrt{2}&3&1\end{bmatrix}$ ← matrike $[1]$

$\cap|$

motivacija:
- grafika
- modeli v strojnem učenju
- visokodimenzionalni podatki

1.1. VEKTORJI

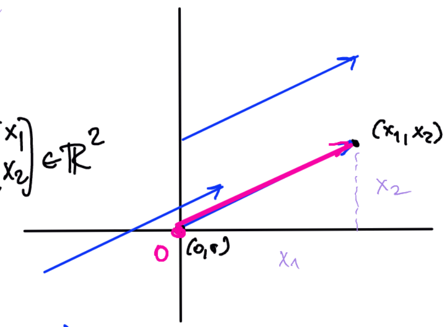
Def: Vektor v $\mathbb{R}^n$ je n-terica števil $\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$.

komponente/koordinate

(obstajajo tudi $\mathbb{C}^n$, $\{0,1\}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{H}^n$, …)

kompleksna števila — kvaternioni

geometrijsko $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$



Def: krajevni vektor točke $A(a_1, a_2, a_3)$ je

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}.$$

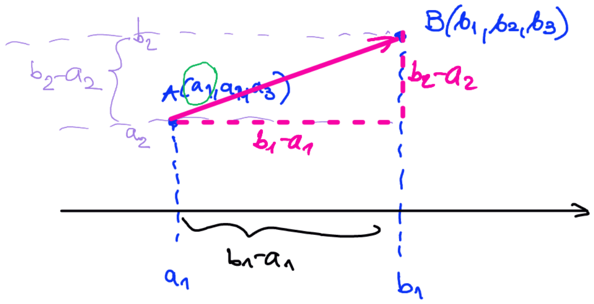
koord. izhodišče $O(0,0,0)$

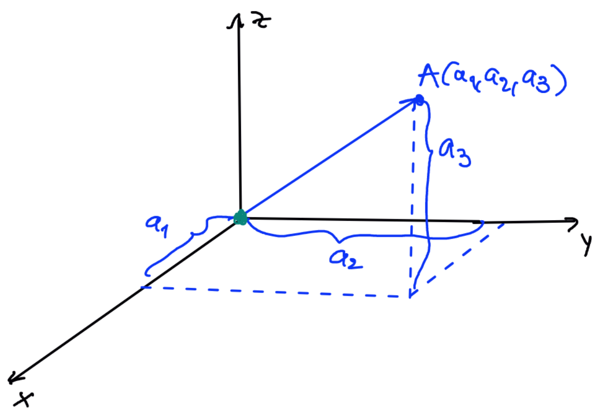
Vektor $\overrightarrow{AB}$ z začetno točko $A(a_1, a_2, a_3)$ in končno točko $B(b_1, b_2, b_3)$ je

končna točka

začetna točka

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{bmatrix}$$





1.1.1. Operacije z vektorji

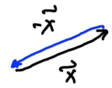
[A] Množenje vektorja s skalarjem

vektorja $\in \mathbb{R}^n$, skalarjem $\in \mathbb{R}$

Def: Za $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\alpha \cdot \vec{x} = \alpha \vec{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$\alpha \cdot \vec{x}$ ← večkratnik vektorja

$$0 \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 x_1 \\ 0 x_2 \\ \vdots \\ 0 x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$ ← ničelni vektor



$1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$-\vec{x} = (-1)\vec{x}$ ← nasprotni vektor

Def: Vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ sta **kolinearna**, če $\vec{x} = \alpha \vec{y}$ ali $\vec{y} = \beta \vec{x}$ za neka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

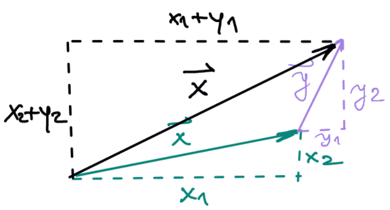
($\vec{0}$ in $\vec{x}$ sta kolinearna za vsak $\vec{x}$)

$\{\alpha \vec{x} \,;\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ je premica, napeta na $\vec{x}$, skozi izhodišče

[B] Seštevanje vektorjev

enako število komponent!!

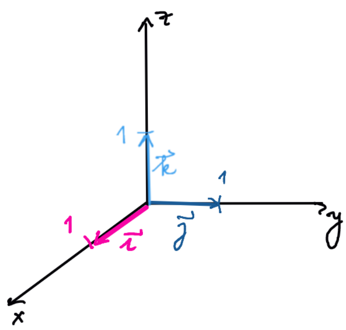
Def: Vsota vektorjev $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ in $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ je $\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$.



[A+B] Linearne kombinacije

Def: Linearna kombinacija vektorjev $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je vektor $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k$, kjer $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

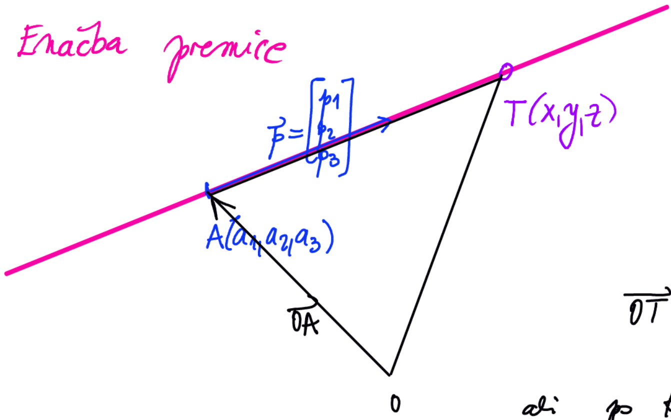
Primer: $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



Vsak vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ je linearna kombinacija $\vec{i}, \vec{j}$ in $\vec{k}$:

$$\underbrace{x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}}_{\text{lin. komb. } \vec{i},\, \vec{j} \text{ in } \vec{k}} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\x_2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \vec{x}$$

Enačba premice



premico p določata
- $\vec{p} \in p$ (smerni vektor)
- $A \in p$ (točka na premici)

Kako določimo $T(x,y,z) \in p$?

$$\vec{OT} = \vec{OA} + \underset{\in \mathbb{R}}{t} \cdot \vec{p}$$

ali po komponentah:

$$p: \quad \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}$$ ← 1 vektorska enačba

$$p: \quad \begin{cases} x = a_1 + tp_1 \\ y = a_2 + tp_2 \\ z = a_3 + tp_3 \end{cases}$$ } 3 enačbe po komponentah

Če $p_1, p_2, p_3 \neq 0$, lahko izrazimo t iz vsake od treh enačb:

koordinate znane točke na premici

$$(t=)\ \boxed{\frac{x-a_1}{p_1} = \frac{y-a_2}{p_2} = \frac{z-a_3}{p_3}}$$ (kanonična oblika enačbe premice) (*)

neznanke (3 koordinate točke na premici)

koordinate smernega vektorja

Kako množimo vektorje?

Množenje OK, ampak previdno!

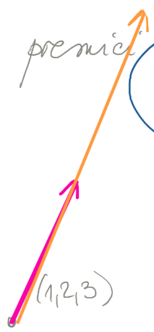
	skalarni produkt $\vec{x}\cdot\vec{y}$	vektorski produkt $\vec{x}\times\vec{y}$	mešani produkt $(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z}=(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
za katere vektorje obstaja?	v $\mathbb{R}^n$	samo v $\mathbb{R}^3$ ($n=3$!)	samo v $\mathbb{R}^3$!
rezultat	$\mathbb{R}$ (skalar)	$\mathbb{R}^3$ (vektor)	$\mathbb{R}$ (skalar)
kaj merimo	kote, $\perp$	ploščine paralelogramov	prostornino paralele-piped
uporaba	dolžine, ...	konstrukcija vektorja, ki je $\perp$ na dana vektorja	- determinante - $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, substitucije

Katere točke ležijo na premici

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \, ? \qquad t \in \mathbb{R}$$

← parametrični zapis

$$\boxed{1} \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$



$t = 1$

$t = 10$

$t = -2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 41 \\ 52 \\ 63 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -8 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Ali leži $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ na tej premici?

$$t: \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \, ?$$

$$\left.\begin{aligned} 4t+1 &= 0 \\ 5t+\cancel{2} &= 1 \\ 6t+\cancel{3} &= 2 \end{aligned}\right\} \text{Ali rešljiv?} \quad \underline{\text{NE.}}$$

$$\underline{t = -\frac{1}{4}} \qquad 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 = -\frac{3}{4} \neq 1 \,//$$