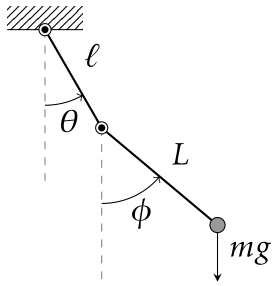
# Vsiljeno nihanje

*Matematično nihalo* je nihalo, pri katerem točkasta masa $m$ visi na lahki, ravni (in neupogljivi) palici dolžine $L$, ki se lahko prosto vrti okrog vpenjališča. Na maso $m$ deluje gravitacijska sila $mg$, kot odmika od ravnovesne lege ob času $t$ pa označimo s $\phi(t)$. Če to nihalo vpnemo v konec druge lahke palice dolžine $\ell$, ki je vpeta v pogonsko gred pod stropom, dobimo mehanski sistem na sliki desno.




## Diferencialna enačba za kot odmika $\phi$

Pri običajnem matematičnem nihalu (tj. $\theta$ = konst.) funkcija $\phi$ reši diferencialno enačbo

$$L\ddot{\phi} + g\sin(\phi) = 0. \tag{1}$$

Zgornja diferencialna enačba velja le v primeru, ko se nihalo lahko brez trenja vrti okrog vpenjališča in ni nikakršnih zunanjih vplivov. Dodali bomo zunanji vpliv: Nihalo prosto vpnemo v konec vrtljive palice dolžine $\ell$, ki je na nasprotnem koncu togo vpeta v pogonsko os. Pogonska gred to palico vrti okrog te osi za kot $\theta = \theta(t)$. Diferencialna enačba, ki opisuje kot odmika $\phi$ od ravnovesne lege, sedaj postane

$$L\ddot{\phi} + g\sin(\phi) = -\ell\ddot{\theta}\cos(\theta - \phi) + \ell\dot{\theta}^2\sin(\theta - \phi). \tag{2}$$

V tej enačbi je $\theta(t)$ dana funkcija, $\phi(t)$ pa neznana funkcija.

V celoten sistem bomo dodali premično tarčo, ki se v smeri pravokotno na ravnino nihanja enakomerno približuje našemu nihalu. Vemo, kdaj bo ta tarča dosegla ravnino nihanja, in želimo doseči, da točkasta masa na koncu nihala zadane predpisano navpično črto (z enačbo $x = x_0$) na tarči. Za koliko moramo nihalo odmakniti iz ravnovesne lege v trenutnku, ko se tarča začne približevati nihalu, da bo nihalo zadelo predpisano navpičnico na tarči?

Pri odgovoru na to vprašanje si bomo pomagali z dvema funkcijama. Prva bo z Runge–Kutta metodo 4. reda reševala sistem diferencialnih enačb prvega reda, ki ga dobimo iz enačbe (2). Za vhod bomo vstavili začetne pogoje $\phi(0) = \phi_0$ in $\dot{\phi}(0) = \omega_0$ v trenutku $t = 0$, za izhod pa dobili položaj $[x, y]^\mathsf{T}$ točkaste mase v trenutku $t = T$, ko premična tarča doseže ravnino nihanja. Opisali smo vektorsko funkcijo

$$\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \mathbf{F}([\phi_0, \omega_0]^\mathsf{T}) = [x, y]^\mathsf{T}.$$

Kompozitum $\mathbf{F}([\phi_0, 0]^\mathsf{T}) = [x, y]^\mathsf{T} \mapsto x$ sedaj opisuje funkcijo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(\phi_0) = x$. Druga od naših funkcij bo s poljubno varianto Newtonove metode rešila enačbo $f(\phi_0) = x_0$ z neznanko $\phi_0$. Pri reševanju bomo privzeli, da za naše nihalo velja

$$g = m = \ell = L = 1, \; -1 \leq x_0 \leq 1.$$

## Naloga

1. Iz 2. Newtonovega zakona $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ izpelji enačbo (1).
2. Zapiši formuli za koordinati $x$ in $y$ položaja točkaste mase $m$ v odvisnosti od kotov $\theta$ in $\phi$ ter dolžin palic $\ell$ in $L$.
3. Zapiši diferencialno enačbo (2) kot sistem dveh diferencialnih prvega reda za funkciji $\phi$ in $\omega = \dot{\phi}$.
4. Napiši octave funkcijo `pos = pendulum(Phi0, Theta, T)`, ki za začetne pogoje $\boldsymbol{\phi}_0 = [\phi_0, \omega_0]^\mathsf{T}$ in funkcijo $\boldsymbol{\theta}(t) = [\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)]^\mathsf{T}$ rešuje diferencialno enačbo (2) do končnega časa $T$ in vrne položaj $[x, y]^\mathsf{T}$, v katerem je točkasta masa ob času $T$.
   *Drži se specifikacij:* `Phi0 = [phi0; omega0]` *je stolpec,* `Theta` *je funkcija spremenljivke $t$, ki vrne stolpec $[\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)]^\mathsf{T}$,* `T` *je število,* `pos = [x; y]` *je stolpec.*
5. Napiši octave funkcijo `phi0 = onTarget(x0, Theta, T)`, ki za $x$-komponento končnega položaja $x_0$ vrne začetni kot odmika $\phi_0$, pri katerem bo (z začetno hitrostjo $\omega_0 = 0$) po pretečenem času $T$ masna točka na nihalu zadela navpičnico z enačbo $x = x_0$ na tarči. *Drži se specifikacij:* `x0`, `T` *in* `phi0` *so števila,* `Theta` *kot zgoraj.*

## Oddaja naloge

Na spletno učilnico oddaj naslednje:

1. datoteki **pendulum.m** in **onTarget.m**, ki naj vsebujeta *komentarje* **in** *test(e)*,
2. datoteko (poročilo) **solution.pdf**, ki vsebuje izpeljavo rešitve in odgovore na vprašanja.

S kolegi se lahko posvetuješ in lahko tudi skupaj rešujete nalogo, vendar moraš program in poročilo izdelati sam. Uporabljaš lahko vse octave funkcije, ki smo jih izdelali na vajah (recimo `rk4.m` in eno od `dnewton.m`, `secant.m` ali `broyden.m`).