Prvi izpit iz Numerične matematike
9. junij 2023

1. **naloga:** Naj bo $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ diagonalna matrika z $0 < d_1 < \ldots < d_n$ in naj bo $z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ vektor. Tvorimo matriko $M = \begin{bmatrix} D & z \end{bmatrix}$:

$$M = \begin{bmatrix} d_1 & & & & z_1 \\ & d_2 & & & z_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & d_n & z_n \end{bmatrix}.$$

Izkaže se, da neničelne singularne vrednosti $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ matrike M zadoščajo nelinearni enačbi

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{d_i^2 - w^2} = 0$$

in zadoščajo lastnosti prepletanja

$$0 < d_1 < \sigma_1 < d_2 < \sigma_2 < \ldots < d_n < \sigma_n < d_n + \|z\|.$$

Naj bo $n = 3, d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3$ in $z_1 = z_2 = z_3 = 1$.

Naloga: Z enim korakom tangentne metode s smiselno izbranima začetnima približkoma ocenite najmanjšo in največjo singularno vrednost σ_1, σ_3.

2. **naloga:** Naj bo f integrabilna funkcija na $[0, 1]$, katere integral želimo izračunati po formuli

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \alpha f(0) + \beta f\Big(\frac{2}{3}\Big) + \gamma f(1).$$

(a) Določite $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, da bo formula čim višjega reda.

(b) Izračunajte integral $\int_0^2 e^{x^2} dx$ z dvakratno uporabo zgornje formule s korakom $h = 1$.

(c) Izračunajte integral $\int_0^2 e^{x^2} dx$ s sestavljenim trapeznim pravilom s korakom $h = 1$.

3. **naloga:** Naj bo $f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$, $u_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $u_2 \in [0, 2\pi)$ parametrizacija torusa:

$$f(u_1,u_2) = \Big(\big(2+\cos(u_1)\big)\cos(u_2), \big(2+\cos(u_1)\big)\sin(u_2), \sin(u_1)\Big).$$

(a) Matrika G, ki se imenuje metrični tenzor, je definirana kot:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f_k}{\partial u_1}\frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f_k}{\partial u_1}\frac{\partial f_k}{\partial u_2} \\ \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f_k}{\partial u_2}\frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f_k}{\partial u_2}\frac{\partial f_k}{\partial u_2} \end{bmatrix}.$$

Po kratkem računu sledi, da je $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = (2+\cos(u_1))^2$. Izračunajte še g_{11} in inverz matrike G:

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}.$$

(b) Za $i,j,k = 1,2$ so Christoffelovi simboli Γ_{ij}^k definirani kot

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{\ell=1}^{2} \left\langle \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_i \partial u_j} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial u_i \partial u_j} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial u_i \partial u_j} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_\ell} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_\ell} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_\ell} \end{bmatrix} \right\rangle \cdot h_{\ell k},$$

kjer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označuje običajen skalarni produkt vektorjev. Po kratkih računih sledi

$$\Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{\sin(u_1)}{2+\cos(u_1)},$$
$$\Gamma_{22}^1 = (2+\cos(u_1))\sin(u_2), \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Izračunajte še Γ_{11}^1.

(c) Najkrajše poti na torusu $\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t))$ zadoščajo naslednjima dvema diferencialnima enačbama drugega reda:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^1 \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2u_2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^2 \frac{du_i}{dt}\frac{du_j}{dt} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Napišite eksplicitno obliko sistema (1).

(d) Prevedite sistem (3c) na sistem prvega reda z uvedbo novih spremenljivk

$$x_1(t) = u_1(t),\ x_2(t) = \frac{du_1}{dt},\ x_3(t) = u_2(t),\ x_4(t) = \frac{du_2}{dt}.$$

(e) Za začetno točko $(u_1(0), u_2(0)) = (0,0)$ in odvoda $\left(\frac{du_1}{dt}(0), \frac{du_2}{dt}(0)\right) = (1,1)$ ocenite $x_i(0.1)$, $i = 1,2,3,4$, z enim korakom Eulerjeve methode na sistemu iz (3d).