Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

16. oktober 2024

Predikatni račun

Predpostavki:	*Vsi študentje računalništva znajo logično sklepati.*
	Škrat Kuzma ne zna logično sklepati.
Zaključek:	*Škrat Kuzma ni študent računalništva.*

Področje pogovora in predikati

Področje pogovora je neprazna *množica* iz katere izbiramo *individualne konstante*.

Predikati so logične *funkcije*, ki za svoje argumente lahko dobijo individualne konstante iz področja pogovora.

Če v predikate vstavljamo (individualne) konstante, dobimo *izjave*.

Spremenljivke in formule

V predikatnem računu bomo za spremenljivke uporabljali črke $x, y, z, \ldots$

V predikate lahko, namesto konstant, vstavljamo tudi spremeljivke. Na ta način pridelamo *formule*. Formule niso nujno izjave.

Kvantifikatorja

Poznamo dva kvantifikatorja:

$\forall$	univerzalni kvantifikator
$\exists$	eksistenčni kvantifikator

formalizacija

Definiraj ustrezne predikate in zapiši naslednje izjave:

- *Nekateri politiki so nepošteni.*
- *Noben politik ni nepošten.*
- *Vsi politiki so nepošteni.*
- *Vsi politiki so pošteni.*

Kako iz formule naredimo izjavo?

Možna sta dva pristopa.

1. Namesto spremenljivke vstavimo konstanto.
2. Formulo zapremo s kvantifikatorji.

Zgled

Dvomestni predikat $P(x, y)$ naj pomeni *x pozna y-ona.*

Na katere načine lahko formulo $P(x, y)$ spremeniš v izjavo?

Izjavne formule

- *spremenljivke* $x, y, z, \ldots$,
- *konstante* $a, b, c, \ldots$,
- *predikati* $P, Q, R, \ldots$,
- izjavni vezniki $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$,
- *kvantifikatorja* $\forall$ in $\exists$ ter
- oklepaja (in) .

Spremenljivkam in konstantam pravimo tudi *termi*.

Atomi predikatnega računa so, na primer,

$$P(x), P(a), Q(x, y), Q(a, x), \ldots$$

Atome dobimo tako, da terme vstavimo v predikate.

Izjavne formule

Izjavne formule so definirane induktivno:

1. Atomi so izjavne formule
2. Če sta W in V izjavni formuli in je x spremenljivka, potem so tudi

$$(\neg W), (W \wedge V), (W \vee V), (W \Rightarrow V), (W \Leftrightarrow V), \ldots$$

$$(\exists x\, W) \quad \text{in} \quad (\forall x\, W)$$

izjavne formule.

Doseg kvantifikatorjev

Doseg kvantifikatorja je *najmanjši možen*: najmanjša izjavna formula, ki jo preberemo desno od kvantifikatorja (skupaj z njegovo spremenljivko).

Kvantifikator *veže* svojo spremenljivko in proste spremenljivke z istim imenom v svojem dosegu.

Formulo brez prostih spremenljivk imenujemo, če imamo izbrano interpretacijo, *izjava*, ali *izjavna shema*, če interpretacija ni določena.

Doseg, vezane in proste spremenljivke

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

$$\forall x \neg \exists x \forall z \, P(x, y, z)$$

$$\exists x \, \neg P(x, y) \Rightarrow Q(x) \wedge R(y)$$

$$\exists x \, P(x) \Rightarrow \forall x \, Q(x) \vee P(x) \wedge R(x) \vee S(y)$$

Interpretacija izjavne formule

Interpretacija $\mathcal{I}$ izjavne formule W je sestavljena iz neprazne množice $\mathcal{D}$, ki ji pravimo *področje pogovora* interpretacije.
Poleg tega

- vsakemu predikatu ustreza 0/1 logična funkcija v $\mathcal{D}$ (0-mestnemu predikatu ustreza izjava oziroma njena logična vrednost)
- vsaki konstanti določimo vrednost v $\mathcal{D}$ (ponavadi je implicitno določena že z imenom konstante)
- vsaki prosti spremenljivki v W določimo vrednost v $\mathcal{D}$, pri tem vsem prostim spremenljivkam z istim imenom določimo *isto* vrednost iz $\mathcal{D}$.

Pomen kvantifikatorjev

Naj bo W formula. Z $W(x/a)$ označimo formulo, ki jo dobimo tako, da v formuli W vse proste vstope spremenljivke x nadomestimo z a.

W	$P(x) \lor \exists x\, Q(x,y) \land R(b,x)$
$W(x/a)$	$P(a) \lor \exists x\, Q(x,y) \land R(b,a)$

Pomen kvantifikatorjev

Formula $\forall x\, W$ je *resnična* v interpretaciji $\mathcal{I}$, če je za vsak element področja pogovora $d \in \mathcal{D}$ resnična formula $W(x/d)$. Sicer je $\forall x\, W$ neresnična.

Formula $\exists x\, W$ je *resnična* v interpretaciji $\mathcal{I}$, če v področju pogovora obstaja $d \in \mathcal{D}$, za katerega je formula $W(x/d)$ resnična. Sicer je $\exists x\, W$ neresnična.

Enakovredne izjavne formule

Izjavni formuli W in V sta *enakovredni*, če imata isto logično vrednost v vseh možnih interpretacijah.

V tem primeru pišemo $W \sim V$.

Interpretacija formul W in V pomeni, da vse predikate, konstante in spremenljivke hkrati izbiramo iz istega področja pogovora. Tudi pomen predikatov v obeh formulah mora biti isti.

Enakovredne izjavne formule

Izjavna formula W je *splošno veljavna*, če je resnična v vsaki interpretaciji.

Izjavna formula V je *neizpolnljiva*, če je neresnična v vsaki interpretaciji.

Splošno veljavne in neizpolnljive izjavne formule so ustreznice tavtologije in protislovja v predikatnem računu.

Zgled

Formuli $\neg\forall x\, W$ in $\exists x\, \neg W$ sta enakovredni.

Zakoni predikatnega računa

So nekateri pomembni pari enakovrednih izjavnih formul:

$$\neg\forall x\, W \sim \exists x\, \neg W$$
$$\neg\exists x\, W \sim \forall x\, \neg W$$

$$\forall x \forall y\, W \sim \forall y \forall x\, W$$
$$\exists x \exists y\, W \sim \exists y \exists x\, W$$

$$\forall x\, (W \wedge V) \sim \forall x\, W \wedge \forall x\, V$$
$$\exists x\, (W \vee V) \sim \exists x\, W \vee \exists x\, V$$

Preimenovanje spremenljivk

Formula

$$\forall x\, (P(w) \Rightarrow P(x))$$

je enakovredna formuli

$$\forall y\, (P(w) \Rightarrow P(y))$$

in ni enakovredna formuli

$$\forall w\, (P(w) \Rightarrow P(w)).$$

Preimenovanje spremenljivk

Trditev

Če se y ne pojavi v W, potem veljata enakovrednosti:

$$\begin{aligned} \forall x\, W &\sim \forall y\,(W(x/y)) \\ \exists x\, W &\sim \exists y\,(W(x/y)) \end{aligned}$$

Preimenovanje spremenljivk

Želja: če je W formula, potem imen prostih spremenljivk ne smemo spreminjati, če zelimo pridelati enakovredno formulo. Vezane spremenljivke lahko preimenujemo tako, da ista spremenljivka (tj. spremenljivka z istim imenom)

- *ne nastopa pri več kvantifikatorjih*
- *ni hkrati vezana in prosta.*

Zakoni predikatnega računa z omejitvami

Če se x ne pojavi (prosto) v formuli C, potem veljajo naslednje enakovrednosti:

$$\forall x\,(C \vee W) \sim C \vee \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \vee W) \sim C \vee \exists x\, W$$

$$\forall x\,(C \wedge W) \sim C \wedge \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \wedge W) \sim C \wedge \exists x\, W$$

Preneksna normalna oblika

Naj bo W izjavna formula. *Preneksna normalna oblika* izjavne formule W je izjavna formula W_{PNO}, za katero velja:

- W_{PNO} je enakovredna W in
- W_{PNO} ima vse kvantifikatorje na začetku.

Izrek

Vsaka izjavna formula W ima preneksno normalno obliko.

Preneksna normalna oblika

Kako do preneksne normalne oblike?

1. Preimenuj vezane spremenljivke v formuli tako, da nobena dva kvantifikatorja ne uporabljata spremenljivke z istim imenom in so imena prostih spremenljivk drugačna od imen vezanih spremenljivk.
2. Premakni kvantifikatorje proti levi, pri tem pa, če je potrebno, nadomesti $\Rightarrow$ in $\Leftrightarrow$ z logičnimi vezniki $\neg, \wedge, \vee$.

Preneksna normalna oblika

$$\forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \Rightarrow D(x) \wedge \exists x\, D(x)$$