

# Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko  
Univerza v Ljubljani

20. oktober 2023

## Predikatni račun

Predpostavki: *Vsi študentje računalništva znajo logično sklepati.  
Škrat Kuzma ne zna logično sklepati.*

---

Zaključek: *Škrat Kuzma ni študent računalništva.*

## Področje pogovora in predikati

*Področje pogovora* je neprazna *množica* iz katere izbiramo *individualne konstante*.

*Predikati* so logične *funkcije*, ki za svoje argumente lahko dobijo individualne konstante iz področja pogovora.

Če v predikate vstavljamo (individualne) konstante, dobimo *izjave*.

## Spremenljivke in formule

V predikatnem računu bomo za spremenljivke uporabljali črke  $x, y, z, \dots$

V predikate lahko, namesto konstant, vstavljamo tudi spremenljivke. Na ta način pridelamo *formule*. Formule niso nujno izjave.

## Kvantifikatorja

Poznamo dva kvantifikatorja:

- $\forall$  univerzalni kvantifikator
- $\exists$  eksistenčni kvantifikator

## formalizacija

Definiraj ustrezne predikate in zapiši naslednje izjave:

- ▶ *Nekateri politiki so nepošteni.*
- ▶ *Noben politik ni nepošten.*
- ▶ *Vsi politiki so nepošteni.*
- ▶ *Vsi politiki so pošteni.*

## Kako iz formule naredimo izjavo?

Možna sta dva pristopa.

1. Namesto spremenljivke vstavimo konstanto.
2. Formulo zapremo s kvantifikatorji.

## Zgled

Dvomestni predikat  $P(x, y)$  naj pomeni  $x$  pozna  $y$ -ona.

Na katere načine lahko formulo  $P(x, y)$  spremeniš v izjavo?

## Izjavne formule

- ▶ *spremenljivke*  $x, y, z, \dots$ ,
- ▶ *konstante*  $a, b, c, \dots$ ,
- ▶ *predikati*  $P, Q, R, \dots$ ,
- ▶ izjavni vezniki  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \dots$ ,
- ▶ *kvantifikatorja*  $\forall$  in  $\exists$  ter
- ▶ oklepaja ( in ) .

Spremenljivkam in konstantam pravimo tudi *termi*.

*Atomi* predikatnega računa so, na primer,

$$P(x), P(a), Q(x, y), Q(a, x), \dots$$

Atome dobimo tako, da terme vstavimo v predikate.

## Izjavne formule

*Izjavne formule* so definirane induktivno:

1. Atomi so izjavne formule
2. Če sta  $W$  in  $V$  izjavni formuli in je  $x$  spremenljivka, potem so tudi

$$(\neg W), (W \wedge V), (W \vee V), (W \Rightarrow V), (W \Leftrightarrow V), \dots$$

$$(\exists x W) \text{ in } (\forall x W)$$

izjavne formule.

## Doseg kvantifikatorjev

Doseg kvantifikatorja je *najmanjši možen*: najmanjša izjavna formula, ki jo preberemo desno od kvantifikatorja (skupaj z njegovo spremenljivko).

Kvantifikator *veže* svojo spremenljivko in proste spremenljivke z istim imenom v svojem dosegu.

Formulo brez prostih spremenljivk imenujemo, če imamo izbrano interpretacijo, *izjava*, ali *izjavna shema*, če interpretacija ni določena.

## Doseg, vezane in proste spremenljivke

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

$$\forall x \neg \exists x \forall z P(x, y, z)$$

$$\exists x \neg P(x, y) \Rightarrow Q(x) \wedge R(y)$$

$$\exists x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x) \vee P(x) \wedge R(x) \vee S(y)$$

## Interpretacija izjavne formule

Interpretacija  $\mathcal{I}$  izjavne formule  $W$  je sestavljena iz neprazne množice  $\mathcal{D}$ , ki ji pravimo *področje pogovora* interpretacije.

Poleg tega

- ▶ vsakemu predikatu ustreza 0/1 logična funkcija v  $\mathcal{D}$  (0-mestnemu predikatu ustreza izjava oziroma njena logična vrednost)
- ▶ vsaki konstanti določimo vrednost v  $\mathcal{D}$  (ponavadi je implicitno določena že z imenom konstante)
- ▶ vsaki prosti spremenljivki v  $W$  določimo vrednost v  $\mathcal{D}$ , pri tem vsem prostim spremenljivkam z istim imenom določimo *isto* vrednost iz  $\mathcal{D}$ .

## Pomen kvantifikatorjev

Naj bo  $W$  formula. Z  $W(x/a)$  označimo formulo, ki jo dobimo tako, da v formuli  $W$  vse proste vstope spremenljivke  $x$  nadomestimo z  $a$ .

$$W \qquad P(x) \vee \exists x Q(x, y) \wedge R(b, x)$$

$$W(x/a) \qquad P(a) \vee \exists x Q(x, y) \wedge R(b, a)$$

## Pomen kvantifikatorjev

Formula  $\forall x W$  je *resnična* v interpretaciji  $\mathcal{I}$ , če je za vsak element področja pogovora  $d \in \mathcal{D}$  resnična formula  $W(x/d)$ . Sicer je  $\forall x W$  neresnična.

Formula  $\exists x W$  je *resnična* v interpretaciji  $\mathcal{I}$ , če v področju pogovora obstaja  $d \in \mathcal{D}$ , za katerega je formula  $W(x/d)$  resnična. Sicer je  $\exists x W$  neresnična.

## Enakovredne izjavne formule

Izjavni formuli  $W$  in  $V$  sta *enakovredni*, če imata isto logično vrednost v vseh možnih interpretacijah.

V tem primeru pišemo  $W \sim V$ .

Interpretacija formul  $W$  in  $V$  pomeni, da vse predikate, konstante in spremenljivke hkrati izbiramo iz *istega* področja pogovora. Tudi pomen predikatov v obeh formulah mora biti *isti*.



## Enakovredne izjavne formule

Izjavna formula  $W$  je *splošno veljavna*, če je resnična v vsaki interpretaciji.

Izjavna formula  $V$  je *neizpolnljiva*, če je neresnična v vsaki interpretaciji.

Splošno veljavne in neizpolnljive izjavne formule so ustreznice tautologije in protislovja v predikatnem računu.

## Zgled

Formuli  $\neg\forall x W$  in  $\exists x \neg W$  sta enakovredni.

## Zakoni predikatnega računa

So nekateri pomembni pari enakovrednih izjavnih formul:

$$\neg \forall x W \sim \exists x \neg W$$

$$\neg \exists x W \sim \forall x \neg W$$

$$\forall x \forall y W \sim \forall y \forall x W$$

$$\exists x \exists y W \sim \exists y \exists x W$$

$$\forall x (W \wedge V) \sim \forall x W \wedge \forall x V$$

$$\exists x (W \vee V) \sim \exists x W \vee \exists x V$$

## Preimenovanje spremenljivk

Formula

$$\forall x (P(w) \Rightarrow P(x))$$

je enakovredna formuli

$$\forall y (P(w) \Rightarrow P(y))$$

in **ni** enakovredna formuli

$$\forall w (P(w) \Rightarrow P(w)).$$

## Preimenovanje spremenljivk

### Trditev

Če se  $y$  ne pojavi v  $W$ , potem veljata enakovrednosti:

$$\forall x W \sim \forall y (W(x/y))$$

$$\exists x W \sim \exists y (W(x/y))$$

## Preimenovanje spremenljivk

Želja: če je  $W$  formula, potem imen prostih spremenljivk ne smemo spreminjati, če želimo pridelati enakovredno formulo. Vezane spremenljivke lahko preimenujemo tako, da ista spremenljivka (tj. spremenljivka z istim imenom)

- ▶ ne nastopa pri več kvantifikatorjih
- ▶ ni hkrati vezana in prosta.

## Zakoni predikatnega računa z omejitvami

Če se  $x$  ne pojavi (prosto) v formuli  $C$ , potem veljajo naslednje enakovrednosti:

$$\forall x (C \vee W) \sim C \vee \forall x W$$

$$\exists x (C \vee W) \sim C \vee \exists x W$$

$$\forall x (C \wedge W) \sim C \wedge \forall x W$$

$$\exists x (C \wedge W) \sim C \wedge \exists x W$$

## Preneksna normalna oblika

Naj bo  $W$  izjavna formula. *Preneksna normalna oblika* izjavne formule  $W$  je izjavna formula  $W_{PNO}$ , za katero velja:

- ▶  $W_{PNO}$  je enakovredna  $W$  in
- ▶  $W_{PNO}$  ima vse kvantifikatorje na začetku.

### Izrek

*Vsaka izjavna formula  $W$  ima preneksno normalno obliko.*

## Preneksna normalna oblika

Kako do preneksne normalne oblike?

1. Preimenuj vezane spremenljivke v formuli tako, da nobena dva kvantifikatorja ne uporabljata spremenljivke z istim imenom in so imena prostih spremenljivk drugačna od imen vezanih spremenljivk.
2. Premakni kvantifikatorje proti levi, pri tem pa, če je potrebno, nadomesti  $\Rightarrow$  in  $\Leftrightarrow$  z logičnimi vezniki  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ .

## Preneksna normalna oblika

$$\forall x A(x) \vee \exists x B(x) \Rightarrow D(x) \wedge \exists x D(x)$$

