

Vaje 5. teden - rešitve

DOKAZ S PROTISLOVJEM RA

$A_1, A_2, \dots, A_k \models B$ natanko tedaj, ko $A_1, A_2, \dots, A_k, \neg B \models \perp$

① b)

1. $p \vee q$	P_{p1}
2. $p \Rightarrow r$	P_{p2}
3. $q \Rightarrow s$	P_{p3}
4.1 $\neg(r \vee s)$	RA
4.2 $\neg r \wedge \neg s$	$\sim(4.1)$
4.3 $\neg r$	$P_0(4.2)$
4.4 $\neg s$	$P_0(4.2)$
4.5 $\neg p$	MT(2, 4.3)
4.6 $\neg q$	MT(3, 4.4)
4.7 p	DS(1, 4.6)
4.8 $p \wedge \neg p$	$\exists d(4.5, 4.7)$
4.9 $\perp$	$\sim(4.8)$
4. $r \vee s$	RA(4.1, 4.9)

d)

1. $p \Rightarrow r \wedge t$	P_{p1}
2. $t \vee s \Rightarrow \neg q$	P_{p2}
3.1 $\neg \neg(p \wedge q)$	RA
3.2 $p \wedge q$	$\sim(3.1)$
3.3 p	$P_0(3.1)$
3.4 q	$P_0(3.1)$
3.5 $r \wedge t$	MP(1, 3.3)
3.6 t	$P_0(3.5)$
3.7 $t \vee s$	Pr(3.6)
3.8 $\neg q$	MP(2, 3.7)
3.9 $q \wedge \neg q$	$\exists d(3.4, 3.8)$
3.10 $\perp$	$\sim(3.9)$
3. $\neg(p \wedge q)$	RA(3.1, 3.10)

c)	1. $p \Leftrightarrow q$	P_{p_1}
	2. $r \vee s \Rightarrow p$	P_{p_2}
	3. $s \vee t$	P_{p_3}
	4. $\neg t \vee r$	P_{p_4}
	5. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$\sim (1)$
	6. $p \Rightarrow q$	$P_0(5)$
	7.1 $\neg q$	RA
	7.2 $\neg p$	MT(6, 7.1)
	7.3 $\neg(r \vee s)$	MT(2, 7.2)
	7.4 $\neg r \wedge \neg s$	$\sim (7.3)$
	7.5 $\neg r$	$P_0(7.4)$
	7.6 $\neg s$	$P_0(7.4)$
	7.7 $\neg t$	DS(4, 7.5)
	7.8 t	DS(3, 7.6)
	7.9 $\neg t \wedge t$	2d(7.7, 7.8)
	7.10 0	$\sim (7.9)$
	7. q	RA(7.1, 7.10)

POGOTOJNI SKLEPI PS uporabljamo kadar ima zaključek obliko implikacije (disjunkcije)!

$A_1, A_2, \dots, A_k \models B \Rightarrow C$ natanko tedaj, ko $A_1, A_2, \dots, A_k, B \models C$
 $A_1, A_2, \dots, A_k \models \neg C \Rightarrow \neg B$ natanko tedaj, ko $A_1, A_2, \dots, A_k, \neg C \models \neg B$
 $A_1, A_2, \dots, A_k \models B \vee C$ natanko tedaj, ko $A_1, A_2, \dots, A_k, \neg B \models C$
 $\sim \neg B \Rightarrow C$

2. c)
- | | |
|-----------------------------|--------------|
| 1. $p \Rightarrow q \vee r$ | P_{p_1} |
| 2. $q \Rightarrow \neg p$ | P_{p_2} |
| 3. $\neg(s \wedge r)$ | P_{p_3} |
| 4. $\neg s \vee \neg r$ | $\sim(3)$ |
| 5.1 p | PS |
| 5.2 $q \vee r$ | MP(1, 5.1) |
| 5.3 $\neg q$ | MT(2, 5.1) |
| 5.4 r | DS(5.2, 5.3) |
| 5.5 $\neg s$ | DS(4, 5.4) |
| 5. $p \Rightarrow \neg s$ | PS(5.1, 5.5) |

- d)
- | | |
|---|--------------|
| 1. $s \wedge (p \Rightarrow t)$ | P_{p_1} |
| 2. $t \Rightarrow (q \vee r)$ | P_{p_2} |
| 3. $p \Rightarrow t$ | $P_{p_3}(1)$ |
| 4.1 p | PS |
| 4.2 t | MP(3, 4.1) |
| 4.3 $q \vee r$ | MP(2, 4.2) |
| 4.4 $\neg q \Rightarrow r$ | $\sim(4.3)$ |
| 4. $p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$ | PS(4.1, 4.4) |

- 3.
- | | |
|--------------------|---|
| PODROČJE POGOVORA | $\mathbb{D} = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ |
| ENOMESTNI PREDIKAT | $P(x)$: x je praštevilo |
| DVOMESTNI PREDIKAT | $D(x, y)$: število x deli število y |

Interpretacije, logične vrednosti, negacije izjavnih formul.

a) $\forall x (P(x) \vee D(2, x))$

"Vsako naravno število je praštevilo ali je deljivo z 2."
logična vrednost je 0 (premislite o številu 1).

Negacija: $\exists x (\neg P(x) \wedge \neg D(2, x))$

b) $\exists x (P(x) \wedge D(2, x))$

"Obstaja praštevilo, ki je deljivo z 2."

Logična vrednost je 1 (premislite o številu 2).

Negacija: $\forall x (\neg P(x) \vee \neg D(2, x))$

c) $\exists x (P(x) \wedge D(5, x))$

"Obstaja praštevilo, ki je deljivo s 5."

Logična vrednost je 1 (premislite o številu 5).

Negacija: $\forall x (\neg P(x) \vee \neg D(5, x))$

d) $\forall x (P(x) \Rightarrow \neg D(10, x)) \sim \forall x (\neg P(x) \vee \neg D(10, x))$

"Nobeno praštevilo ni deljivo z 10."

Logična vrednost je 1.

Negacija: $\exists x (P(x) \wedge D(10, x))$

to obliko potrebujemo
za pisanje negacije.

e) $\forall x (D(4, x) \Rightarrow D(2, x)) \sim \forall x (\neg D(4, x) \vee D(2, x))$

"Vsako naravno število, ki je deljivo s 4, je deljivo tudi z 2."

Logična vrednost je 1.

Negacija: $\exists x (D(4, x) \wedge \neg D(2, x))$

f) $\forall x \exists y D(x, y)$

"Vsako naravno število deli neko naravno število"

Logična vrednost je 1. Tudi 0 deli samo sebe, saj je
možna enačba $0 \cdot x = 0$.

Negacija: $\exists x \forall y \neg D(x, y)$

g) $\exists y \forall x D(x, y)$

"Obstaja naravno število, deljivo z vsemi naravnimi števili."
logična vrednost je 0 (premislite o deljenju z ničlo).

Negacija $\forall y \exists x D(x, y)$

h) $\forall x \exists y (P(y) \wedge D(y, x))$

"Vsako naravno število je deljivo z določenim praštevilo."
logična vrednost je 0 (premislite o številu 1).

Negacija: $\exists x \forall y (\neg P(y) \vee \neg D(y, x))$

i) $\exists x \forall y (D(x, y) \Rightarrow \neg P(y)) \sim \exists x \forall y (\neg D(x, y) \vee \neg P(y))$

"Obstaja naravno število, ki ne deli nobenega praštevila."
logična vrednost je 1 (premislite npr. o številu 6).

Negacija: $\forall x \exists y (D(x, y) \wedge P(y))$

j) $\forall x \exists y (P(x) \Rightarrow P(y) \wedge D(y, x)) \sim \forall x \exists y (\neg P(x) \vee (P(y) \wedge D(y, x)))$

"Vsako praštevilo je deljivo z določenim praštevilo."
logična vrednost je 1 (s samim seboj).

Negacija: $\exists x \forall y (P(x) \wedge (\neg P(y) \vee \neg D(y, x)))$