Diskretne strukture VSP: prvi kolokvij

29. 11. 2023

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena.
Vse odgovore dobro utemelji!

1	
2	
3	
4	
Σ	

REŠITVE

Ime in priimek

2 9 1 1 2 0 2 3

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Z uporabo matematične indukcije utemelji, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}.$$

(Pomoč: $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$*)*

5 $\underline{n=1}$ $L = 1$ $D = \frac{4-1}{3} = 1$ ✓

2 $\underline{n \longmapsto n+1}$ I.P. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$

2 Dokažimo $1^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 = \frac{4(n+1)^3 - (n+1)}{3}$

5 $D: \frac{4(n+1)^3 - n - 1}{3} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3}$

10 $L: \underbrace{1^2 + \ldots + (2n-1)^2}_{\text{i.p.}} + (2n+1)^2 \overset{\text{i.p.}}{=} \frac{4n^3 - n}{3} + (2n+1)^2 = \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3}$

1 $L = D$ ✓

2. naloga (25 točk)

Trimestni izjavni veznik A je definiran kot

$$A(p,q,r) \equiv p \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$$

a) (10 točk) Zapiši resničnostno tabelo za veznik A in zapiši konjunktivno normalno obliko (KNO) izraza $A(p,q,r)$.

6

p	q	r	A	
0	0	0	0	←
0	0	1	0	←
0	1	0	0	←
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	0	←

KNO: 4

$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$
$\wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

b) (15 točk) Kateri izmed naborov $\{A, 0\}$, $\{A, \Rightarrow\}$, $\{A, \vee\}$, $\{A, \wedge\}$, $\{A, 1\}$, so polni? Odgovore natančno utemelji.

2 •) $\{A, 0\}$ ni poln, ohranja 0

2 •) $\{A, \vee\}$ ni poln, ohranja 0

2 •) $\{A, \wedge\}$ ni poln, ohranja 0

4 •) $\{A, \Rightarrow\}$ je poln. Izrazimo $\{0, \Rightarrow\}$

$A(p,p,p) = 0$, "$\Rightarrow$" že imamo

5 •) $\{A, 1\}$ je poln. Izrazimo $\{\neg, \wedge\}$

$A(p,1,1) = \neg p$ ... imamo negacijo

$A(1,p,r) = \neg(p \wedge r)$

$\Rightarrow p \wedge r = A(A(1,p,r), 1, 1)$ ... imamo konjunkcijo

3. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Pravilnost sklepa

$$p \vee q\,,\; p \vee r\,,\; r \Rightarrow s\,,\; \neg(q \wedge s) \;\models\; p$$

formalno dokaži s pravili sklepanja.

1

1. $p \vee q$ pred
2. $p \vee r$ pred
3. $r \Rightarrow s$ pred
4. $\neg(q \wedge s)$ pred
5. $\neg q \vee \neg s$ ~ 4

6.1.1. p AP_1 ✓

6.2.1. r AP_2

6.2.2 s $MP(6.2.1, 3)$

6.2.3 $\neg q$ $DS(5, 6.2.2)$

6.2.4 p $DS(6.2.3, 1)$

6. p $AP(6.1.1, 6.2.1, 6.2.4)$

3 10 2

2

—||—

5. $\neg p$ RA pred
6. r $DS(5, 2)$
7. q $DS(5, 1)$
8. s $MP(6, 3)$
9. $q \wedge s$ $Zd(7, 8)$
10. $(q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$ $Zd(9, 4)$
11. 0 ~ 10
12. p $RA(5, 11)$

3 10 2

b) (10 točk) Pokaži, da sta izjavni formuli

$$\exists x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \quad \text{in} \quad \forall x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, Q(x)$$

enakovredni. Enakovrednost utemelji z zakoni predikatnega računa.
(*Namig: kvantifikatorje poskusi potisniti v notranjost k predikatom*).

$\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \sim \exists x (\neg P(x) \vee Q(x)) \sim \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

$\sim \forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)$

10

4. naloga (25 točk)

Naj bodo A, B in C poljubne množice.

a) (15 točk) Dokaži, da velja vsebovanost

$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C)$$

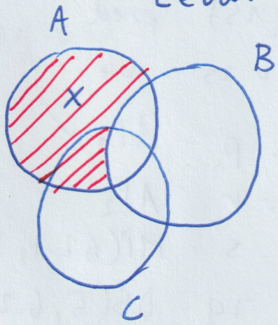
$$x \in (A \setminus B) \setminus C \Rightarrow \boxed{x \in A}^{1} \wedge x \notin B \wedge x \notin C$$

10

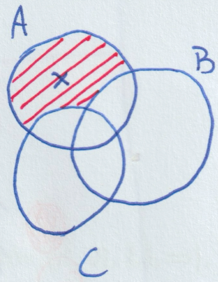
$$x \notin B \Rightarrow x \in B^c \Rightarrow \boxed{x \in B^c \cup C}^{2}$$

$$1 \wedge 2 \Rightarrow x \in A \cap (B^c \cup C)$$

Leva:



Desna:

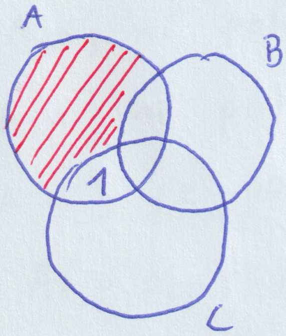


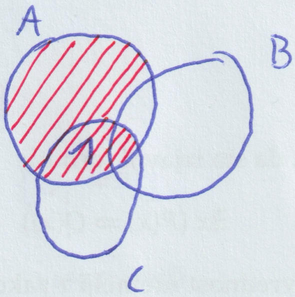
$\subseteq$

5

b) (10 točk) Ali velja enakost

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)\,?$$





protiprimer:

$A = C = \{1\}$ 4

$B = \{\ \}$

2 za ~~protiprimer~~ pravilen odgovor na podlagi skice.

$$(\{1\} \setminus \{\ \}) \setminus \{1\} = \{\ \} \quad 2$$

$$\neq$$

$$\{1\} \setminus (\{\ \} \setminus \{1\}) = \{1\} \quad 2$$