- DE
- Splošna, partikularna rešitev, Eulerjeva metoda
- DE z ločlj. spr.
- LDE 1. reda
- Ortogonalne trajektorije
- Zakon naravne rasti
- Logistična enačba

DIFERENCIALNE ENAČBE

Diferencialna enačba 1. reda za funkcijo

$$y=y(x)$$

je enačba oblike

$$y'=f(x,y)$$

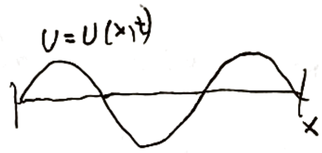
Diferencialna enačba n-tega reda:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$$

Diferencialnim enačbam za funkcije 1 spr pravimo NAVADNE DIFERENCIALNE ENAČBE. Poznamo tudi PARCIALNE DIFERENCIALNE ENAČBE. Primer

Enačba nihanja strune:

$$u_{tt}=c^2u_{xx}$$



Tu bomo obravnavali le navadne DE 1. reda

$$y'=f(x,y).$$

SPLOŠNA REŠITEV enačbe $y'=f(x,y)$ je množica vseh rešitev te enačbe.

Primer: Enačba

$$y'=x^2$$

ima splošno rešitev

$$y=\frac{x^3}{3}+C\,,\quad C \text{ poljubna konstanta.}$$

PARTIKULARNA REŠITEV enačbe $y' = f(x,y)$ je tista rešitev, ki gre skozi dano točko $T(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Primer: $y' = x^2$

splošna rešitev: $y = \frac{x^3}{3} + C$

Če iščemo rešitev, ki gre skozi $T(3, 2024)$:

$2024 = \frac{3^3}{3} + C \Rightarrow C = 2015$; $y = \frac{x^3}{3} + 2015$

↳ PARTIKULARNA REŠITEV

V splošnem diferencialnih enačb

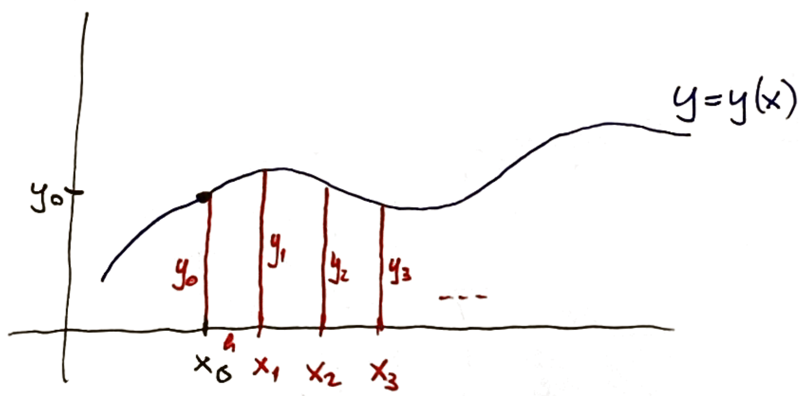
$$y' = f(x,y)$$

ne znamo vedno rešiti. Lahko pa poiščemo rešitev numerično.

EULERJEVA METODA

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

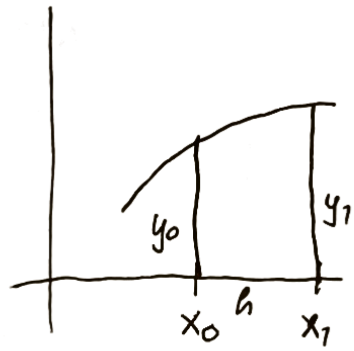
Rešitev:



Izberemo majhen h. Za numerične uporabe zadošča določiti pribl. vrednosti

$$y_n = y(x_n), \quad x_n = x_0 + nh$$

Linearna aproksimacija:



$$y_1 = y(x_0+h) \doteq y(x_0) + y'(x_0)h$$

$$y_1 \doteq y_0 + f(x_0,y_0)h$$

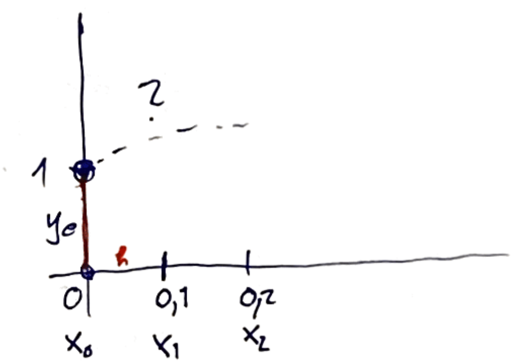
Podobno $y_2 \doteq y_1 + f(x_1,y_1)\cdot h$ itd:

$$\boxed{y_{n+1} \doteq y_n + f(x_n,y_n)\cdot h}$$

<u>Primer</u>: $y' + 2y = 2 - e^{-4x}$ $\quad y(0)=1$

$h = 0,1$

$$y' = \underbrace{-2y + 2 - e^{-4x}}_{f(x,y)}$$



$$y_1 \doteq y_0 + f(x_0,y_0)h = 1 + (-2\cdot 1 + 2 - e^{-4\cdot 0})\cdot 0,1 = 0,9 \qquad y(0,1) \doteq 0,9$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)h = 0,9 + (-2\cdot 0,9 + 2 - e^{-4\cdot 0,1})\cdot 0,1 = 0,85 \qquad y(0,2) = 0,85$$

ITD.

DIFERENCIALNA ENAČBA Z LOČLJIVIMA SPREMENLJIVKAMA

$$y' = \frac{P(x)}{Q(y)}$$

Pišemo $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)}$ $\Rightarrow Q(y)\,dy = P(x)\,dx$

$\Rightarrow \int Q(y)\,dy = \int P(x)\,dx + c$

če izrazimo y, dobimo splošno rešitev

Primer: $y' = y$

$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln y = x + \ln c$

$\Rightarrow y = C \cdot e^x$ splošna rešitev

Primer $y y' = \sin x$ $\quad y(0) = -2$

$y\,dy = \sin x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = -\cos x + C \Rightarrow y = \pm\sqrt{2C - 2\cos x}$ splošna rešitev

$y(0) = -2$

$\pm\sqrt{2C - 2} = -2 \Rightarrow 2C - 2 = 4 \Rightarrow C = 3$

$y = -\sqrt{6 - 2\cos x}$ partikulana rešitev

LINEARNA DIFERENCIALNA ENAČBA 1. REDA

$$y' + f(x)\cdot y = g(x)$$

Najprej rešimo homogeni del:

$$y' + f(x)\,y = 0$$ DE z ločljivima spremenlj.

$$y_H = C\cdot e^{-\int f(x)\,dx}$$

$$y_1 := e^{-\int f(x)\,dx}$$

$$y_H = C\cdot y_1$$

Rešitev nehomogene enačbe iščemo v obliki

$$y = C(x)\cdot y_1$$

$C(x)$ neznana funkcija (VARIACIJA KONSTANTE)

Vstavimo v enačbo

$$(C(x)\,y_1)' + f(x)\cdot C(x)\,y_1 = g(x)$$

$$C(x)\cdot\underbrace{(y_1' + f(x)\,y_1)}_{=0} + C'(x)\,y_1 = g(x)$$

$$C'(x) = \frac{g(x)}{y_1} \quad\Rightarrow\quad C(x) = \int \frac{g(x)}{y_1}\,dx + C$$

$$y = C(x)\,y_1 = \underbrace{C\cdot y_1}_{y_H} + y_1\cdot\int\frac{g(x)}{y_1}\,dx$$

Primer: $y' + \frac{\text{[redacted]}\,y}{x} = 3x$

Homogeni del:

$$y' + \frac{\text{[redacted]}\,y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\text{[redacted]}\,y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\text{[redacted]}\,\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln y = -\text{[redacted]}\ln x + \ln C$$

$$\Rightarrow y_H = \frac{C}{x} \qquad y_1 = \frac{1}{x}$$

Variacija konst.: $y = C(x)\cdot y_1 = \frac{C(x)}{x}$

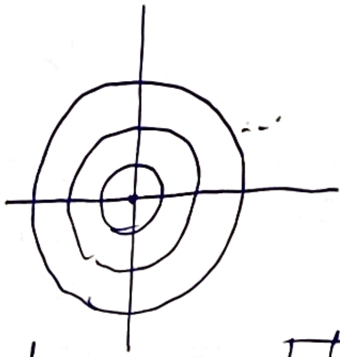
$$C'(x) = \frac{g(x)}{y_1} = \frac{3x}{\frac{1}{x}} = 3x^2 \Rightarrow C(x) = x^3 + C$$

$$y = \frac{x^3 + C}{x} = x^2 + \frac{C}{x}$$

splošna rešitev

NEKAJ UPORAB DIFERENCIALNIH ENAČB

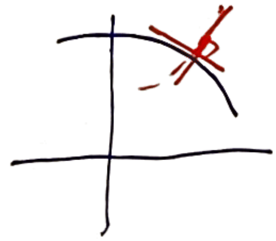
1. ORTOGONALNE TRAJEKTORIJE



Primer: Imamo družino krožnic

$$x^2+y^2-c=0$$

Iščemo ortogonalne trajektorije na to družino krivulj, t.j. družino krivulj, ki vsako od danih krožnic sekajo pod pravim kotom.

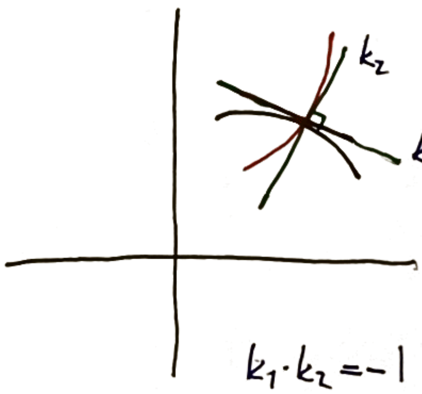


Splošno: iščemo ortogonalne trajektorije na družino krivulj

$$F(x,y,c)=0.$$

Rešitev iščemo v obliki

$$y=f(x,c) \quad \ldots \text{ enačbe ortogonalnih trajektorij.}$$



$k_1 \cdot k_2 = -1$

ODVOD DRUŽINE KRIVULJ:

$$F_x + F_y \cdot y' = 0 \Rightarrow y'_k = -\frac{F_x}{F_y}$$

ODVOD TRAJEKTORIJ:

$$y' = -\frac{1}{y'_k} = \frac{F_y}{F_x}$$

Imamo enačbo $F(x,y,c)=0$. Če uspemo izraziti c z x in y, dobimo dif enačbo

$$y' = \frac{F_y}{F_x} = g(x,y)$$

za ortogonalne trajektorije

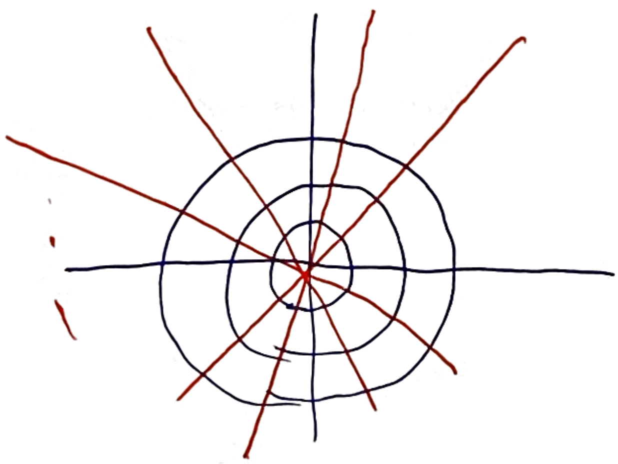
Primer Družina krožnic $x^2+y^2=c$

$\underbrace{x^2+y^2-c}_{F(x,y,c)}=0$ $c = x^2+y^2$ (c izražena z x, y)

Dif enačba ortogonalnih trajektorij?

$y' = \frac{F_y}{F_x} = \frac{2y}{2x} = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y = Cx$ premice



② ZAKON NARAVNE RASTI

$y(t)$ = velikost populacije y v času t $\qquad y(0) = y_0$

Recimo, da je prirastek populacije ~~sorazmeren~~ v majhni spremembi časa h sorazmeren $y(t)\,h$:

$$y(t+h) = y(t) + k \cdot y(t) \cdot h$$

k = povprečna stopnja rodnosti

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = k \cdot y(t) \qquad h \to 0$$

dobimo diferencialno enačbo

$$\boxed{y' = ky \qquad y(0) = y_0}$$

Enačba z ločljivima spr.; rešitev

$$\underline{y = y_0 \cdot e^{kt}}$$

<u>Primeri</u>: Širjenje virusov, radioaktivni razpad $(k<0)$

3 LOGISTIČNA ENAČBA

$y(t)$ ... velikost populacije v času t $\qquad y(0)=y_0$

b - povpr. stopnja rodnosti

d - povprečna stopnja smrtnosti

1. MODEL RASTI

$$y(t+h) = y(t) + b\cdot y(t)\cdot h - d\,y(t)\cdot h$$

$$\frac{y(t+h)-y(t)}{h} = (b-d)\cdot y(t) \qquad \boxed{r=b-d}$$

$h\to 0$:

$$y' = r\,y \qquad y(0)=y_0$$

$$y = y_0\cdot e^{rt}$$

2. MODEL RASTI

: V 1. modelu smo dovolili, da y raste preko vsake meje

Lahko predpostavimo, da je zaradi omejenih virov velikost populacije omejena s K. Imamo enačbo

$$y' = r\cdot y\left(1-\frac{y}{K}\right) \qquad y(0)=y_0$$

Uvedemo novi spremenljivki

$$z=\frac{y}{K} \qquad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{y'}{K}\cdot\frac{1}{r}$$

$$x = r\cdot t$$

Dobimo $\quad Krz' = Krz(1-z) \quad$ oz. $\quad \boxed{z'=z(1-z) \quad z(0)=z_0}$

LOGISTIČNA ENAČBA

Rešitev logistične enačbe

$$1-z = 1-\frac{y}{K} > 0$$

$$z(0) = z_0 = \frac{y_0}{K}$$

$$\frac{dz}{z(1-z)} = dx$$

$$\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right) dz = dx$$

$$\ln \frac{z}{1-z} = x + \ln C$$

$$\frac{z}{1-z} = C \cdot e^x$$

$$z\left(1 + Ce^x\right) = C \cdot e^x$$

$$z = \frac{C \cdot e^x}{1+Ce^x} \qquad z(0) = \frac{y_0}{K}$$

$$\frac{y_0}{K} = \frac{C}{1+C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{y_0}{(K-y_0)}$$

$$y = K \cdot z = K \cdot \frac{\frac{y_0}{K-y_0} e^x}{1 + \frac{y_0}{K-y_0} e^x}$$

Oz:

$$y = \frac{Ky_0}{K-y_0} \frac{1}{e^{-\cancel{k}t} + \frac{y_0}{K-y_0}}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = K$$