Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Osnove matematične analize:
2. računski izpit

7. februar 2024

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami in navadnega kalkulatorja. Uporaba grafičnega kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

a) (13 točk) Poišči vse rešitve enačbe

$$z^2 + \overline{z}^2 + i(z + \overline{z}) = 6 + 4i$$

za $z \in \mathbb{C}$.

Rešitev : Če kompleksno število z zapišemo v kartezičnih koordinatah $z = x + yi$, kjer $x, y \in \mathbb{R}$, lahko enačbo zapišemo v obliki

$$(x + yi)^2 + (x - yi)^2 + i(2x) = 6 + 4i$$

Po poenostavitvi dobimo

$$2x^2 - 2y^2 + 2xi = 6 + 4i$$

Ker se morata realna in imaginarna dela na obeh straneh enačbe ujemati, se enačba prevede na sistem (realnih) enačb

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2y^2 &= 6 \\ 2x &= 4 \end{aligned}$$

Iz druge enačbe takoj sledi $x = 2$, iz prve pa nato še $y^2 = 1$. Tako imamo dve rešitvi $z_1 = 2 + i$ in $z_2 = 2 - i$.

b) (12 točk) Poišči vse rešitve enačbe

$$w^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

za $w \in \mathbb{C}$ in jih skiciraj v kompleksni ravnini.

Rešitev : Absolutna vrednost kompleksnega števila $u = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ je očitno $|u| = 1$, nahaja pa s v tretjem kvadrantu pri polarnem kotu $\phi = \frac{4}{3}\pi$. Polarni zapis števila u je tako

$$u = e^{\frac{4}{3}\pi i}$$

Enačba $w^4 = u$ ima štiri korene

$$w_k = e^{\frac{\pi}{3}i + \frac{\pi}{2}i}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

ki določajo kvadrat z oglišči, ki ležijo na enotski krožnici v $\mathbb{C}$ pri kotih $\frac{2\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

2. naloga (25 točk)

Naj bo $a_0 = 12$ in $a_{n+1} = (a_n^2 + 10)/(2a_n - 3)$.

a) (15 točk) Dokaži, da je zaporedje a_n padajoče in omejeno.
Rešitev : Omejeno dokažemo z indukcijo: $a_0 = 12 > 5$ in

$$a_{n+1} - 5 = \frac{a_n^2 - 10a_n + 25}{2a_n - 3} = \frac{(a_n - 5)^2}{2a_n - 3} > 0.$$

Za dokaz monotonosti si oglejmo razliko sosednjh členov:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-a_n^2 + 3a_n + 10}{2a_n - 3} = \frac{-(a_n - 5)(a_n + 2)}{2a_n - 3} < 0,$$

ker je $a_n > 5$. Torej je $a_{n+1} < a_n$.

b) (10 točk) Izračunaj limito zaporedja (a_n).
Rešitev : Ker je zaporedje padajoče in omejemo, je konvergetno. Naj bo $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Potem je $a = \frac{a^2+10}{2a-3}$, kar nam da $-a^2 + 3a + 10 = -(a-5)(a+2) = 0$. Ker so vsi členi pozitivni, je lahko le $a = 5$.

3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x,y) = 3x^2y - 3x^2 + y^3 - 3y^2$$

a) (15 točk) Poišči stacionarne točke funkcije f.
Rešitev : Enačbi za stacionarne točke sta

$$\begin{aligned} f_x &= 6xy - 6x = 0 \\ f_y &= 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{aligned}$$

Če prvo enačbo peonastavimo v $x(y-1) = 0$, lahko ločimo dva primera, $x = 0$ ali $y = 1$. Za primer $x = 0$ po drugi enačbi dobimo $y(y-2) = 0$. Za primer $y = 1$ po drugi enačbi dobimo $x^2 = 1$. Skupaj imamo štiri stacionarne točke $T_1(0,0)$, $T_2(0,2)$, $T_3(-1,1)$ in $T_4(1,1)$.

b) (10 točk) Klasificiraj stacionarne točke funkcije f.
Rešitev : Hessejeva matrika je

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{bmatrix}$$

Za vrednosti Hessejeve matrike, izračunane v stacionarnih točkah dobimo

$$Hf(T_1) \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, Hf(T_2) \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, Hf(T_3) \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, Hf(T_4) \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Tako je T_1 lokalni maksimum, T_2 je lokalni minimum, T_3 in T_4 pa sta sedli.

4. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Izračunaj nedoločeni integral

$$\int \sin(x + \arctan(x)) \frac{x^2+2}{x^2+1}\, dx.$$

Rešitev : Vpeljimo $t = x + \arctan(x)$. Potem je $dt = \frac{x^2+2}{x^2+1}\, dx$ in integral se poenostaviv v $\int \sin t\, dt = -\cos t = -\cos(x + \arctan(x)) + C$.

b) (15 točk) Izračunaj določeni integral

$$\int_{-1}^{\infty} (x^3 + x)e^{-x^2}\, dx.$$

Rešitev : Očitna substitucija $t = x^2$ (v določeni integral) ni injektivna na celotnem integracijskem območju, zato enakosti

$$\int_{-1}^{\infty} (x^3 + x)e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{\infty} (t+1)e^{-t}\, dt$$

ne smemo zapisati (meja pri $x = -1$ se je transformirala $t = 1$.)

Če integral najprej razdelimo na dva dela $\int_{-1}^{\infty} = \int_{-1}^{1} + \int_{1}^{\infty}$, vidmo, da je prvi integral enak 0 (integral lihe funkcije na simetričnem območju).

Torej moramo izračunati le

$$I = \int_{1}^{\infty} (x^3 + x)e^{-x^2}\, dx.$$

Substitucija $t = x^2$ je sedaj ustrezna in integral se preoblikuje v

$$\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty} (t+1)e^{-t}\, dt.$$

Računajmo $\int (t+1)e^{-t}\, dt = \int e^{-t}\, dt + \int te^{-t}\, dt = -e^{-t} + \int te^{-t}\, dt$. in z integracijo per partes še $\int te^{-t}\, dt = -(t+1)e^{-1}$.

Sledi

$$\frac{1}{2}\int (t+1)e^{-t}\, dt = -\frac{1}{2}(2e^{-t} + te^{-t}).$$

Z upoštevanjem mej dobimo $I = \frac{3}{2}e^{-1}$.

Opomba: Komentar glede neinjektivnosti substitucije $t = x^2$ je pravzaprav potreben le, če substitucijo uporabimo na določenem integralu. Če pa najprej izračunamo nedoločeni integral

$$\int (x^3 + x)e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}(2e^{-x^2} + x^2e^{-x^2}) + C,$$

lahko potem izračuanmo določeni integral na običajen način z vstavljanjem mej -1 in ∞.