Prosojnica 1

Cilji: - Uvod v kvantno mehaniko.
- kvantno računalništvo in algoritmi
- kako delujejo strojna oprema (polprevodniki) in kvantne tehnologije

1. Pregled:
   1. Matematični uvod
   2. Nihanje in valovanje
   3. Snov in sevanje ⇒ začetki kvantne mehanike
   4. kvantna mehanika
   5. kvantno računanje I: - večdelčna stanja (tenzorski produkt)
      - preplet kodiranja
      - spin
   6. Meritev, Bellova stanja in teleportacija
   7. Dinamika kvantnih sistemov
   8. Merske napake, princip nedoločenosti in meritev Bellove neenakobe (Nobelova '22)
   9. kvantno računanje II
   10. kvantni algoritmi (Deutsch-Jotzsa, Grover, Schör)
   11. Kvantne tehnologije in strojna oprema

Literatura: Kvantne in računalniške tehnologije, Rok Žitko

QC for the very curious, Matuschak & Nielsen

Quantum computation and quantum information, Chuang & Nielsen

Quantum computing: An applied approach, Hidary

Rešene vaje, Denis Golež

Domače naloge: Bonus točke

Predznanja: Fizika 1, Linearna algebra, Osnove digitalnih vezij

Povezovanja: Arhitektura računalniških sistemov
Izračunljivost in računska zahtevnost (2. stopnja)
Nekonvencionalne platforme in metode procesiranja (2. stopnja)

Ocenjevanje: Pisni: 2 kolokvija, pisni izpit
Datum določite z asistentko

Ustni izpit: vsebina predavanj in seznam vprašanj

Priporočam branje skripte za naslednje predavanje.

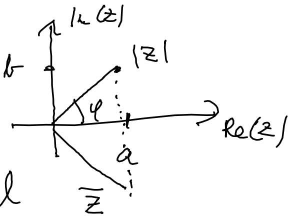
kontakt: - spletna učilnica
- denis.golez@fmf.uni-lj.si

Govorilne po dogovoru.

1) Matematični uvod

1.1) Kompleksna števila ($\sqrt{-1} = i$)

$z = a + ib$; $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$ kompleksna ravnina



Polarni zapis

$z = |z| e^{i\varphi}$

$|z| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$ Modul

ϑ ... argument

kompleksna konjugacija : $\bar{z} = a - ib$

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Množenje : $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$

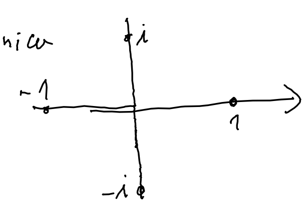
Deljenje : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Komutativna : $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

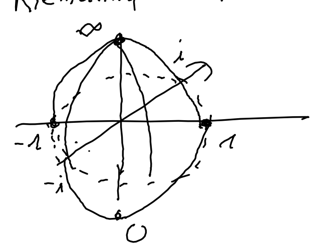
Eulerjeva enačba : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ $\quad (e^{i\pi} + 1 = 0)$

(Dokaz na vajah)

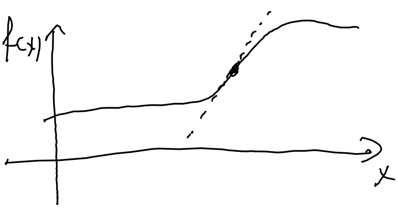
Enotska krožnica



Riemannova sfera



1.2 Odvodi in diference



Odvod

$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

Diferenca (diskretna verzija)

Leva dif. $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{\Delta x}$

Desna $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x}$

Centralna $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2 \Delta x}$

Uporaba v numeričnem računanju.

1.3 Navadne diferencialne enačbe

Newton, Leibniz (17. stoletje)

$\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ funkcija ene spremenljivke $\begin{cases} \dot{y} & \text{Newton} \\ \frac{dy}{dx} & \text{Leibniz} \\ y' & \text{Lagrange} \end{cases}$

Primeri: Newtonov zakon $\left(m\ddot{x} = F(x)\right)$, ekologija $\left(\dfrac{dN}{dt} = bN - dN\right.$
b... koeficient rojstev
d... koeficient smrti)
ekonomija, družboslovje

N-ti red: $y', y'', y^{(3)}, \ldots, y^{(N)}$

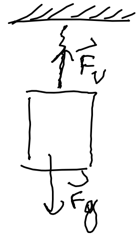
$F(x, y, \ldots, y^{(N)}) = 0$ se prevede na sistem N navadnih diferencialnih enačb

Začetni pogoji: za $N=1$ $y(x=0) = C$

za N $y(x=0) = C_1, \ldots, y^{(N)}(x=0) = C_n$

Reševanje: → Zbirka formul + programi za simbolno računanje (Mathematica)
→ Nastavki
→ Numerično

Primer:



ali

$$\sum_i \vec F_i = m\vec a$$

$$mg + k(x_0+x) - \underbrace{\gamma \dot x}_{\text{upor zraka}} = m\ddot x$$

Ravnovesje: $mg + kx_0 = 0$ $\qquad x_0 = -\frac{mg}{k}$

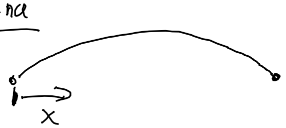
Nihanje: $m\ddot x + \gamma\dot x - kx = 0$ $\qquad$ Z.p.: $x(t=0)=x_0$

$x'(t=0)=v_0$

1.4 Parcialne diferencialne enačbe

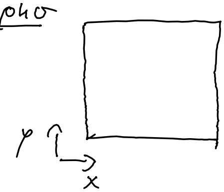
= diferencialne enačbe več spremenljivk

Struna



$f(t,x,\frac{\partial x}{\partial t},\dots)$

Opno



$f(t,x,y,\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t},\dots)$

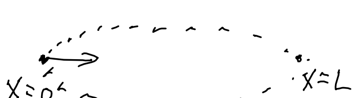
$$f(t,x,\frac{\partial x}{\partial t},\dots)=0$$

Začetni pogoji $f(t=0,x)=a_0(x)$

Robni pogoji $f(t,x\in S_\partial)=b(x)$

Parcialni odvod: $\frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x_1,\dots,x_i+\delta x,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}{\delta x}$

Primer: Vpeta struna

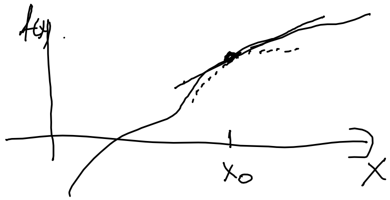


Valovna enačba

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}=0$$

R.p. $y(x=0,t)=y(x=L,t)=0$

1.5 Taylorjev razvoj in trigonometrične relacije



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Primeri:

$$e^x = \sum_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} +$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

Eulerjeva formula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

Z Eulerjevo formulo dobimo

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \text{ itd.}$$

Opozorilo: Delamo v enotah rad; perioda je 2π.

1.6 Operatorji

Operator je preslikava funkcije v funkcijo: $\hat{P}: f \to g$

Definicijsko območje in zaloga vrednosti so funkcije.

Primer: odvajanje $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] \to \frac{df}{dx}$

integral $\int dx \left[f(x)\right] \to \int f(x) dx$

Linearni operator

$$\hat{A}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right) = \alpha \hat{A} f(x) + \beta \hat{A} g(x)$$

Je odvajanje linearni operator?

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right) = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{dg}{dx}$$ Da.

protiprimer: kvadriranje.

1.7. Linearna algebra

vektor: stolpec števil $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

operacije: - seštevanje $\vec{v} + \vec{w}$

- množenje s skalarjem $a\vec{v}$

Te operacije so komutativne $\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$

asociativne $(\vec{v}+\vec{w})+\vec{z} = \vec{v} + (\vec{w}+\vec{z})$

distributivne $\alpha\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$

Matrika: tabela števil velikosti $m \times n$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ & & & \\ & & & m_{mn} \end{bmatrix}$$

Operacije: - seštevanje $M+N$

- množenje s skalarjem αM

- množenje matrik $(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} N_{kj}$: Nekomutativno

$(M\cdot N) \neq (N\cdot M)$

Operacije na vektorjih in matrikah:

a) konjugacija $\vec{v}^* = \begin{bmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{bmatrix}$; $M = \begin{bmatrix} m_{11}^* & \cdots & m_{1n}^* \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

b) Transpozicija $\vec{v}^T = [v_1, \ldots, v_n]$; $M^T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & \cdots \\ m_{12} & \ddots & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$

c) Hermitska konjugacija $M^\dagger = (M^T)^*$

$$(M^\dagger)_{ij} = M_{ji}^*$$

Pravila za produkte: $(M \cdot N)^* = M^* N^*$ ... za dvojne operacije

$$(M \cdot N)^T = N^T M^T \qquad M^{**} = M$$

$$(M \cdot N)^\dagger = N^\dagger M^\dagger \qquad M^{TT} = M$$

$$M^{\dagger\dagger} = M$$

Primer: Paulijeve matrike $\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$$\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Skalarni produkt $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_i v_i^* w_i = \vec{v}^\dagger \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\varphi$

Pravila: $\vec{v}(\alpha \cdot \vec{w}) = \alpha \, \vec{v} \cdot \vec{w}$

$$(\alpha \vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha^* \, \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}\vec{w} + \vec{v}\vec{w}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{w})^* = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot (M \vec{w}) = (M^\dagger \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Ortogonalna vektorja: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ [21.2.2024]

Hilbertov prostor:

- Vektorski prostor: Množica vektorjev $V = \{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$ z operacijami vektorske vsote $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ in množenja s skalarjem $a\vec{v}$; če velja 10 pravil

[izpusti
a) $\vec{v} + \vec{w} \in V$, b) Asociativnost, c) obstaja $\vec{0}$ $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$,
d) $\forall v$ obstaja $\vec{w}$, da je $\vec{v} + \vec{w} = 0$, e) Komutativnost vsote
f) $a\vec{v} \in V$, g) Asociativnost množenja s skalarjem, h) obstaja 1; da $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$; i) Distributivnost na seštevanje $a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + b\vec{w}$
j) Distributivnost na seštevanje $(a+b)\cdot\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
]

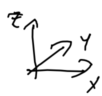
- Hilbertov prostor: vektorski prostor s skalarnim produktom

Norma: $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

Baza: - n linearno neodvisnih vektorjev v $\mathbb{C}^n$.

- Ortonormirana baza $\hat{e}_i \hat{e}_j = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases}$

- Standardna baza



$\hat{x} = (1, 0, 0, \dots)$
$\hat{y} = (0, 1, 0, \dots)$
$\hat{z} = (0, 0, 1, \dots)$

- komponente $\vec{v}_i = \vec{v} \cdot \hat{e}_i$

Unitarne matrike $U^\dagger U = \mathbb{1}$; $U^\dagger = U^{-1}$

Involucija: $C^2 = \mathbb{1}$

Projektor: $P^2 = P$

Kroneckerjeva delta $\delta_{mn} = \begin{cases} 1; & \text{če } m = n \\ 0; & \text{če } m \neq n \end{cases}$

Primer: $\sum_m \delta_{mn} A_m = A_n$

Komutator: $[A, B] = AB - BA$

1.8 Problem lastnih vrednosti

$A \vec{v} = \lambda \vec{v}$

- karakteristični polinom $\det(\vec{A} - \lambda \vec{v}) = 0$

če $A = A^\dagger$: 1) $\lambda \in \mathbb{R}$

2.) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ orthogonalni lastni vektorji

Primer uporabe: Sistem diferencialnih enačb

$\vec{y}'(x) + \underline{\underline{A}}\, \vec{y}(x) = 0$

Nastavek: $\vec{y}(x) = \vec{v}\, e^{-\lambda x}$

$-\lambda \vec{v}\, e^{-\lambda x} + A \vec{v}\, e^{-\lambda x} = 0$

$e^{-\lambda x} (A - \lambda I) \vec{v} = 0 \Rightarrow (A - \lambda I) \vec{v} = 0$ Načrej na vajah

1.9 Tenzorski produkt

V in W sta Hilbertova prostora z bazo $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ in $\{\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_m\}$

Tenzorski produkt $V \otimes W$ je $n \times m$ dimenzionalni prostor, ki ga napenjajo bazni vektorji:

$$\{v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_n \otimes w_n\}$$

Tenzorski produkt linearnih operatorjev

$$(A \otimes B)(\vec{v} \otimes \vec{w}) = (A\vec{v}) \otimes (B\vec{w})$$

V matrični reprezentaciji tenzorski produkt operatorjev ustreza Kroneckerjevem produktu

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} B & \dots & a_{1n} B \\ a_{mn} B & \dots & a_{nn} B \end{bmatrix}$$

Primer: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 \cdot B & 2 \cdot B \\ 2B & 3 \cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Tenzorske relacije: $\rightarrow (A \otimes B)^{\dagger} = A^{\dagger} \otimes B^{\dagger}$

$\rightarrow Tr[A] = \sum_i A_{ii}$ $\quad Tr[A \otimes B] = Tr A \cdot Tr B$

$\rightarrow \det(A \otimes B) = (\det A)^m \cdot \det(B)^n$

Več: Linear algebra for Quantum Computation