2. Nihanje in valovanje

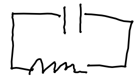
[Cilj: kako opišemo nihanje in valovanje. Kaj je svetloba? Kako merimo čas? Kako uglasimo kitaro?]

2.1 Nihanje

Nihanje je ponavljajoč pojav pretakanja energije iz ene v drugo obliko okoli ravnovesne vrednosti, npr. potencialna v kinetično in nazaj.

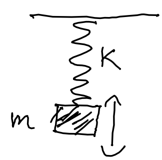
primeri: - matematično

- oscilator v elektroniki (LC)



Energija el. in magnetnega polja

- vzmet



- plima in oseka

- kristalni oscilatorji iz kremena (kvarca) - SiO_2

Piezoelektrični pojav: - zunanje polje povzroči stisk
- mehanska napetost povzroči raztezek in električno napetost

Nihajni cikel: el. napetost → stisk → mehanska napetost → začetno stanje + malo več zaradi inercije → → raztezek → el. napetost

(RLC vezje z zelo majhnimi izgubami)

Frekvence: kHz ~> ~100 MHz · (Phase locked loops PLL v računalnikih)

Frekvenca odvisna od temperature $f = f_0 \left(1 - 4\cdot 10^{-8} (T - T_0)^2\right)$

$\Delta T = 10\,K \Rightarrow 2$ min / leto

OXCO oven-controlled crystal oscillator - nastavi na točno temperaturo

- atomske ure (npr. GPS sateliti)

2.1.1) opis nihanja

Stanje ob času t: $x(t)$ in pogoj za nihanje $x(t) = x(t+T)$

T... perioda

$\nu = \frac{1}{T}$ frekvenca

$\omega = 2\pi\nu$ krožna ~~frekvenca~~ (kotna hitrost)

Kot vrtenja v rad.

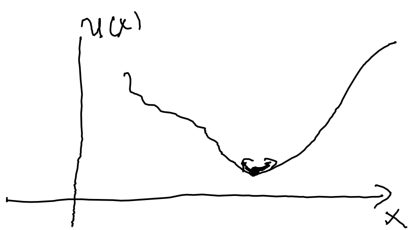
Uporabimo izraz lastna frekvenca in lastni nihajni čas, ker je nihanje nihala prepuščenega samemu sebi. V nasprotju z frekvenca vzbujanja

2.1.2) Harmonično (sinusno) nihanje $\quad x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Amplituda

Faza (fazni zamik)

Primer:



$$U(x) = U(x_0) + \frac{kx^2}{2} + \frac{k_2 x^3}{3} + \dots$$

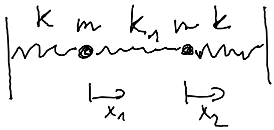
Newtnov zakon $\quad m\ddot{x} = F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \cancel{- k_2 x^2} - \dots$ Linearizacija problema

za majhen x

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dušeno nihanje: $x(t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t + \varphi)$; potrebno dovajati energijo, da se nihanje ohrani

2.1.3. Sklopljeni nihali in problem lastnih vrednosti



$$-kx_1 - k_1(x_1-x_2) = m\ddot{x}_1$$
$$-kx_2 - k_1(x_2-x_1) = m\ddot{x}_2$$

Nastavek:
$$x=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} = \begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}(-\omega^2)e^{i\omega t}$$

$$\cancel{e^{i\omega t}}\begin{bmatrix}-k-k_1 & +k_1\\ k_1 & -k-k_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix} = -m\omega^2\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}\cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$
$$\Omega^2 = \frac{k_1}{m}$$

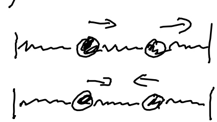
$$\left(\begin{bmatrix}-\omega_0^2-\Omega^2 & \Omega^2\\ \Omega^2 & -\omega_0^2-\Omega^2\end{bmatrix} + I\omega^2\right)\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}+\omega^2-\omega_0^2-\Omega^2 & \Omega^2\\ \Omega^2 & \omega^2-\omega_0^2-\Omega^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=0 \Rightarrow M\vec{x}=0$$

Netrivialna rešitev: $\det(M)=0$

$$(\omega^2-\omega_0^2-\Omega^2)^2-\Omega^4=0 \qquad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$(\omega^2-\omega_0^2-2\Omega^2)(\omega^2-\omega_0^2)=0$$



$v_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$v_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

Dva nihajna načina

$$\omega_1=\pm\omega_0$$
$$\omega_2=\pm\sqrt{\omega_0^2+2\Omega^2}$$

Nauk zgodbe:
Sklopitev oscilatorjev vodi do razcepitve frekvenc.

2.1.4) Nelinearni pojavi

$$F=-k_1x-k_3x^3$$

perioda $T=T(A)$ odvisna od amplitude

kaotični pojavi: Dvojno nihalo

θ_1,θ_2 sta kaotični rešitvi = zelo občutljivi na začetne pogoje

2.2 Valovanje = nihajoče motnje, ki se širijo v prostoru

Primeri: – mehanska (vodna površina, vrv, struna)

– zvok: nihanje tlaka v zraku ali snovi

– Elektromagnetno nihanje (EM): svetloba, radijski valovi

– kvantna mehanika

– Gravitacijski valovi

– Električno valovanje v žici: pomembno za sodobno hitro digitalno elektroniko
Pomembne celo dolžine logic čipov!

Valovanje potrebuje medij, npr. voda za valovanje površine

– EM: eter?
skozi prazen prostor
Moderna verzija: polje

Medij se celotno ne premakne.

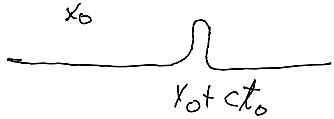
2.2.1. Opis

Valovna funkcija $\psi(x,t)$ opiše odmik od ravnovesne lege

Trenutna slika $\psi(x,t=0)$

$= f(x)$

$\psi(x,t=t_0)$



$f(x-ct_0)$

Potovanje v levo $f(x+ct)$

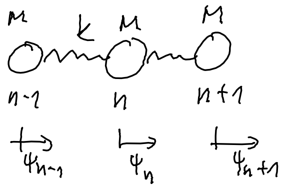
desno $f(x-ct)$

Pokaži 1-.cdf

2.2.2 Zvok v snovi in valovna enačba

Propagacijo zvoka v snovi obravnavamo kot sistem sestavljenih nihal.

Newtonov zakon za odmik $\psi(n,t)$



$$k(\psi_{n+1}-\psi_n) - k(\psi_n-\psi_{n-1}) = m\ddot{\psi}_n$$

$$\omega_0^2(\psi_{n+1}-2\psi_n+\psi_{n-1}) = \ddot{\psi}_n$$

Diferenčna enačba

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\psi'(x+\frac{\delta}{2}) - \psi'(x-\frac{\delta}{2})}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{\frac{\psi(x+\delta)-\psi(x)}{\delta} - \frac{\psi(x-\delta)-\psi(x)}{\delta}}{\delta}$$

$$\simeq \frac{\psi_{n+1}+\psi_{n-1}-2\psi_n}{\delta^2}$$

$\delta = a$ ... razdalja med atomi

$$\omega_0^2 \cdot a^2 \, \frac{\psi_{n+1}+\psi_{n-1}-2\psi_n}{a^2} = \ddot{\psi}_n$$

Diskretna

↓

Parcialna diferencialna

$$\underbrace{\omega_0^2 a^2}_{= c^2} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

$\boxed{\text{Valovna enačba}}$

$$c^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dt^2} \qquad c = \omega_0 a$$

Spomnite: $x = ct$ in naredimo dimenzijsko analizo

$[m = \frac{m}{s} s]$

Splošna rešitev: $\psi = a\,\psi_1(x-ct) + b\,\psi_2(x+ct)$

Desni val Levi val

$\boxed{\text{Pokaži: 1b.gif}}$

2.2.3 Ravni val (rešitev valovne enačbe)

$\psi(x,t) = \phi(x)\, e^{-i\omega t}$ v valovno enačbo

$$c^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} \cancel{e^{-i\omega t}} = -\omega^2 \phi(x) \cancel{e^{-i\omega t}}$$

$$c^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\omega^2 \phi(x)$$

nastavek: $\phi(x) = A e^{ikx}$

$$-c^2 k^2 \cancel{A} \cancel{e^{ikx}} = -\omega^2 \cancel{A} \cancel{e^{ikx}}$$

$$\omega^2 = c^2 k^2 \qquad \boxed{\omega = ck}$$

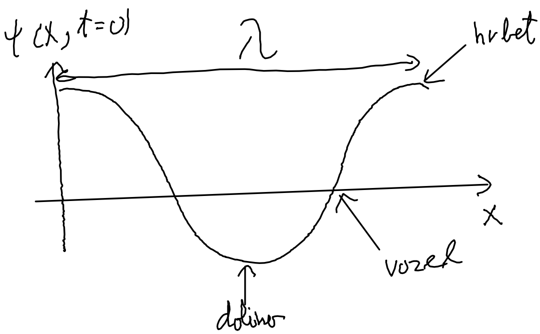
Povezava med periodo, hitrostjo in valovnim številom k

Pogoj periodičnosti: $\psi(x,t) = Re\left[A e^{i(kx-\omega t)}\right] = A\cos(kx - \omega t + \phi)$

$$\Downarrow$$

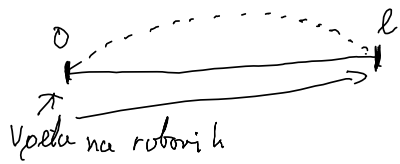
$$k\lambda = 2\pi$$

$$\underline{k = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{1}{m}\right]}$$ valovno število



Ravni val je idealizacija, da dober približek za laserski žarek.

2.2.4 Struna



Robni pogoji: $\psi(x=0,t) = \psi(x=l,t) = 0$

Nastavek: $\psi(x,t) = A\sin(kx)\, e^{i\omega t} \Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2$

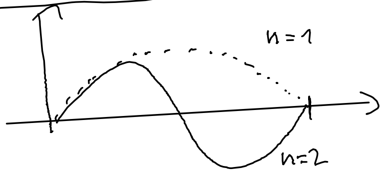
Pogoj $\sin(kL)=0$

$$kl = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{l} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Meri število vozlov

Stoječe valovanje in lastne rešitve



$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

$$\omega = ck = c\frac{\pi}{l}\cdot n$$

$$\nu = \frac{c}{2l} n \qquad \text{Harmoniki}$$

$$\nu_0 = \frac{c}{2l} \qquad \text{Osnovna frekvenca}$$

Komentarji: - valovna enačba je enaka, a različni robni pogoji

- Prvi primer kvantizacije frekvenc zaradi "omejitve" v prostoru

Hitrost razširjanja valovanja na struni:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

T... napetost strune (npr. vijaki na glavi kitare)

$\mu = \frac{m}{l}$ linearna gostota mase

Splošno $c = \sqrt{\frac{\text{vračanje k ravn}}{\text{inercija}}}$

$\boxed{\text{Pokaži: 3\_ str}}$

$\boxed{28.2}$

2.3 Načelo superpozicije

Majhne motnje se med seboj ne čutijo

$$\psi_1 = \psi_1(x-ct)$$

$$\psi_2 = \psi_2(x-ct)$$

Skupna motnja je $\psi(x) = a\psi_1(x-ct) + b\psi_2(x-ct)$

Poglejmo, da izpolni valovno enačbo $\qquad \psi$ je rešitev

$$c^2 \frac{d^2}{dx^2}(\psi_1+\psi_2) = c^2\left(a\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + b\frac{d^2\psi_2}{dx^2}\right) = a\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + b\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\psi$$

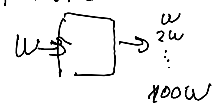
Superpozicija je splošna lastnost linearnih sistemov, ψ kot prva potenca, a pisani i odvodi.

Svetloba je valovanje: + v praznem prostoru so Maxwellove enačbe linearne

– v snovi nelinearne:

a) podvajanje frekvence $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\omega t))$

b) višji harmoniki → krajše oscilacije



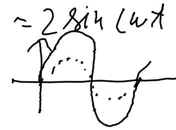
(Nobelova nagrada 2023)
Agostini, Krausz, L'Huillier

2.3.1 Interferenca (= seštevanje valov)

Presenetljivo: končna amplituda je ali večja ali manjša

Konstruktivna interferenca: $\sin(\omega t) + \sin(\omega t) = 2\sin(\omega t)$

Valovanje v fazi



Destruktivna interferenca: $\sin(\omega t) + \sin(\omega t + \pi) = 0$

Valovanje iz faze

Splošni primer: $\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi) =$

$$2\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$\boxed{\text{Pokaži: 2\_ . cfd}}$

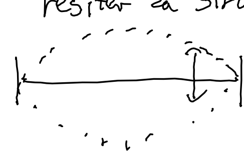
Faza med (0,1): določa celotno intenziteto

Uporaba: – noise canceling slušalke

Stoječe valovanje (dva nasprotno gibajoča vala $f(x-ct) + f(x+ct)$)

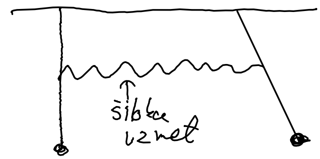
$$\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) = 2\underbrace{\sin(kx)}_{\text{rešitev za struno}}\cdot\cos(\omega t)$$

$\boxed{\text{Pokaži: 5\_ vlakec}}$



2.3.2 Utripanje

Začetni pogoj



Poskus dveh sklopljenih nihal

Kako se giblje tak sistem?

"prelaganje" energije ~~od~~ enega do drugega nihala.

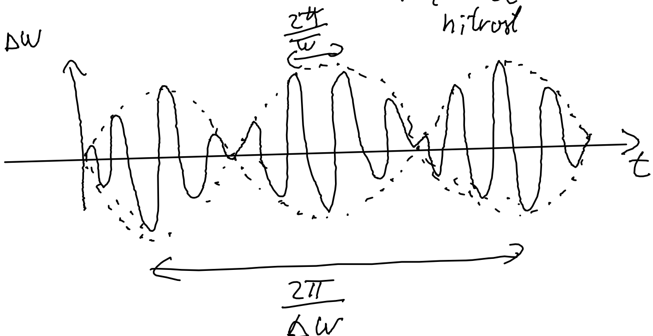
Rešitev:

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2 \sin\left(\underbrace{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}_{\bar\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}} t\right) \cdot \cos\left(\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right) t\right)$$

$\bar\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ Povprečna kotna hitrost

$\Delta\omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ Razlika kotnih hitrosti

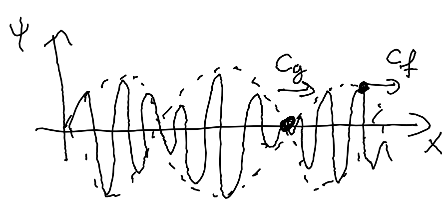
$\bar\omega \gg \Delta\omega$



Utripanje valovanja: 2 valovanji z enako amplitudo A in hitrostjo c, a različni λ ali ν: $\psi_i = A \sin(k_i x - \omega_i t)$

$$\psi_1 + \psi_2 = 2A \sin(\bar k x - \bar\omega t) \cos(\Delta k x - \Delta\omega t)$$

$\boxed{\text{Pokaži 4\_ .cdf}}$



$c_f = \frac{\bar\omega}{\bar k}$ fazna hitrost

$c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ grupna hitrost (hitrost premikanja ovojnice!

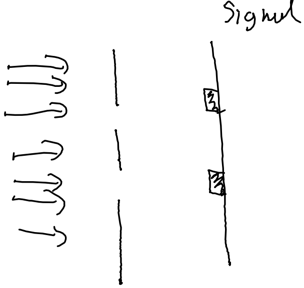
Energija in informacija potujeta z c_g. c_f je lahko večji od svetlobne hitrosti, a c_g ne.

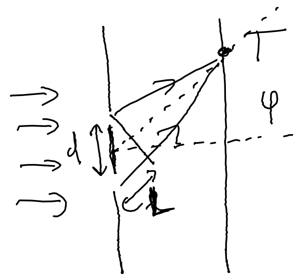
Valovni paket: sestavimo iz veliko valovanj z malček različnim λ in ω

2.3.3 Youngov poskus (interferenca dveh ravnih valovanj) (1801)

Tok delcev

Valovanje





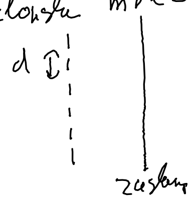
$$\psi_1+\psi_2 = \sin(kx-\omega t) + \sin(k(x+L)-\omega t)$$

⊕ Konstruktivna interferenca $kL = 2\pi\cdot n \iff L = n\lambda$

⊖ Destruktivna interferenca $kL = \pi(2n-1) \iff L = \left(n-\frac{1}{2}\right)\lambda$

Uklonska mrežica: steklena mrežica z izluščenimi režami, kjer je razmik d istega reda kot valovna dolžina.

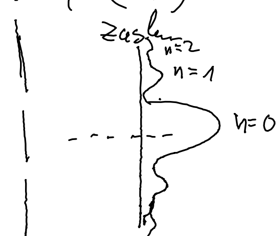
Natančno merjenje valovne dolžine



$$d \sin\varphi = L \Rightarrow$$

⊕ $d\sin\varphi = n\lambda$

⊖ $d\sin\varphi = \left(n-\frac{1}{2}\right)\lambda$



Pomen Youngovega poskusa: Dokaz valovne narave svetlobe (Ponovljeno z elektroni (Claus Jönsson '61), večje molekule (Arndt '02))