# 7. Nedoločenost

Cilj: Meritve in napake v klasični in kvantni mehaniki

Heisenbergov princip nedoločenosti in komplementarnost

Bellove neenačbe

=

## 7.1 Napake (statistične in sistematične)

Vzorec $x_i ; i=1,\dots,N$. $\mu$ je točna vrednost

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i x_i$$

kako natančna je povprečna vrednost? Pojem cenilke.

Statistična napaka [error bar] : $s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2$

$s^2$ ... varianca

$s$ ... standardni odklon

$\delta x = \frac{1}{\sqrt{N}} s$

$\mu = \bar{x} \pm \delta\bar{x}$ Z verjetnostjo 68% je prava vrednost v tem intervalu.

centralni limitni izrek (zakon velikih števil); za večino porazdelitev bo porazdelitev povprečja konvergirala proti normalni porazdelitvi (Gaussova) z napako $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$, kjer je N velik.

## 7.2) Verjetnostna gostota

Primeri: a) Listje pada iz drevesa, kje je listja več/manj

b) Detektor meri v omejenem prostoru

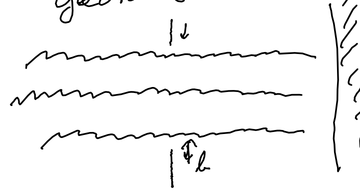

Merimo posamezne dogodke $\frac{\Delta N}{N} = \rho(x)\cdot dx$

Verjetnostna gostota za dogodke

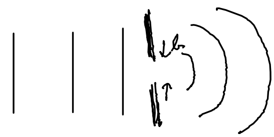
## 7.3) Dualnost svetlobe in delcev

$b$ ... karakteristična razdalja

$b \gg \lambda$ : Geometrijska optika, geometrijska senca, žarki




$b \ll \lambda$ : Valovna optika, uklon, interferenca.




Kaj pa delci?

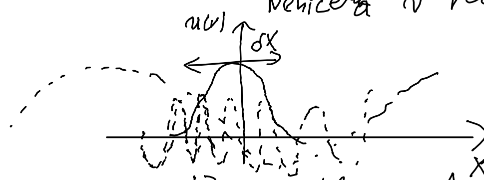
Heissenbergova neenačba?

$\delta x$ ... dimenzija omejitve delca

$p_0$ ... moment delca

$$\psi(\vec{r}) = u(r)\, e^{i \frac{\vec{p}_0 \vec{r}}{\hbar}}$$

Neničelna v regiji $\delta x$




$\lambda_0 \ll \delta x$ Vloga valovanj z $\lambda_0 \ll \delta x$ je majhna

Potrebujemo $\lambda_0 \gtrsim \delta x$

Močna utež le za $\delta\lambda \sim \delta x$

$$\delta p = \frac{h}{\delta\lambda} \sim \frac{h}{\delta x}$$

$$\delta p \cdot \delta x \sim h$$

$$\Downarrow$$

$$\delta p\, \delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Standardne deviacije pozicije in momenta lahko določimo le do neke natančnosti.

Izgubi se koncept trajektorije.

## Primer: Prosti delec

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ipx}$$

$$\langle x\rangle = \int \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cancel{e^{-ipx}}\, x\, \cancel{e^{ipx}}\, dx = 0$$

$$\sigma_x^2 = \langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \cancel{e^{-ipx}}\, x^2\, \cancel{e^{ipx}}\, dx = \frac{1}{3L}\, x^3\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3L}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{1}{3\cancel{L}}\left(\frac{L^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{8}\,4}\cdot\cancel{2}\right) = \frac{L^2}{12}$$

$\sigma_x = \frac{L}{2\sqrt{3}}$ Za velik sistem $L \to \infty$, $\sigma_x \to \infty$ in delec je povsem razmazan po prostoru.

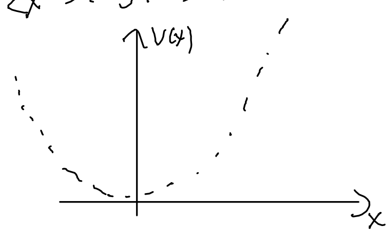
D.N. Pokaži, da je $\langle p\rangle = p$ in $\langle \sigma_p\rangle = 0$

## Harmonski oscilator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$$

$$\langle x\rangle = \int \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx \qquad \langle x^2\rangle = \int \psi^*(x)\, x^2\, \psi(x)\, dx$$

Simetrija $V(-x) = V(x)$ in osnovno stanje je soda funkcija $\psi(-x) = \psi(x)$.




Pozicija: $\langle x\rangle = 0$

$$\sigma_x = \int \psi^*(x)\,(x - \underbrace{\langle x\rangle}_{=0})^2\, \psi(x)\, dx = \int \psi^*(x)\, x^2\, \psi(x)\, dx = \langle x^2\rangle$$

Moment: $\langle p\rangle = 0$, ker je stanje vezano $\Rightarrow \sigma_p = \langle p^2\rangle$

$$H_{pot} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \Rightarrow \langle x^2\rangle = \frac{\langle H_{pot}\rangle}{\frac{1}{2} m\omega_0^2}$$

$$\langle H_{pot}\rangle = \langle H_{kin}\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$H_{kin} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \langle p^2\rangle = \langle H_{kin}\rangle\, 2m$$

$$\langle x^2\rangle\langle p^2\rangle = \frac{1}{4}\,\frac{\left(\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^2\cdot 2\cancel{m}}{\frac{1}{2}\cancel{m}\,\omega_0^2} = \left(\hbar\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right)^2$$

$$\underline{\sigma_x\,\sigma_p = \hbar\left(n+\tfrac{1}{2}\right)}$$

Višje kot je kvantno število $n$, večji je produkt nedoločenosti

## 7.4 Princip komplementarnosti ('27)

Dve opazljivki $\hat{A}$ in $\hat{B}$ sta skupaj merljivi (združljivi), če med sabo komutirata $[\hat{A},\hat{B}]_- = 0$.

Primer pozicije in momenta $\hat{x}$, $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

$$[\hat{x},\hat{p}]\psi = x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x\,\psi(x) = x\cancel{\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\right)} + i\hbar\psi(x) + \cancel{i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x}} = i\hbar\psi(x)$$

$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ Pozicija in moment ne komutirata in zato za njuni varianci velja nedoločenost $\sigma_x\cdot\sigma_p \geq \hbar$

Za splošni opazljivki velja $\sigma_A\,\sigma_B \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right|$.

## 7.5 Bellova neenačba ('57; CHSH verzija '69)

Alice Viktor Bob

$\leftarrow\circ\rightarrow$

Alice meri $A_0, A_1$; kjer meritev izbere naključno.

Bob -||- $B_0, B_1$; -||-

Recimo, da obstajajo skrite spremenljivke $a_0, a_1, b_0, b_1$; ki določijo meritev Alice ($a_0=+1 \Rightarrow$ meritev $\hat{A}_0$ bo vedno vrnila +1).

$$a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 - a_1b_1 = (a_0+a_1)b_1 + (a_0-a_1)b_1$$

$S = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1 = (a_0 + a_1) b_1 + (a_0 - a_1) b_1$

Možnosti $\quad a_0 = a_1 \quad a_0 = -a_1 \quad \Rightarrow S = \begin{cases} (a_0 + a_1) b_1 \\ (a_0 - a_1) b_1 \end{cases}$ To je ali $\pm 2$ ali 0.

Povprečimo preko veliko meritev

$\langle S \rangle = |\langle a_0 b_0 \rangle| + |\langle a_0 b_1 \rangle| + |\langle a_1 b_0 \rangle| - |\langle a_1 b_1 \rangle| \leq 2$

Klasična limita

kvantna mehanika omogoča

$\langle A_0 \otimes B_0 \rangle + \langle A_0 \otimes B_1 \rangle + \langle A_1 \otimes B_0 \rangle - \langle A_1 \otimes B_1 \rangle > 2$ in $\leq 2\sqrt{2}$

Eksperimentalna potrditev: A. Aspect '82.

7 Dokaz:

Viktor pripravi stanje $|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$

Alice meri $\quad A_0 = \sigma_z, \quad A_1 = \sigma_x$

Bob meri $\quad B_0 = -\frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$B_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Pričakovane vrednosti

$\langle A_0 \otimes B_0 \rangle = \langle \psi | (A_0 \otimes B_0) \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = \langle \psi | \frac{1}{\sqrt{2}} \; |0$