ADIABATNO KVANTNO RAČUNALNIŠTVO

V termodinamiki "adiabatno" pomeni "hitro", oziroma brez izmenjave toplote ($dQ=0$).
Tukaj "adiabatno" pomeni "počasi".

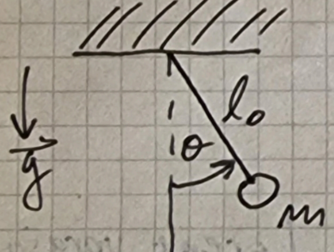
1. KAKO RAČUNAJO ADIABATNI KVANTNI RAČUNALNIKI?

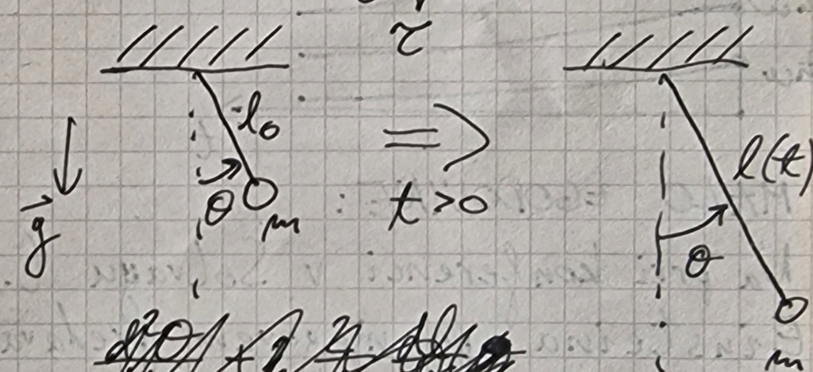
KLASIČNI ADIABATNI TEOREM:

LORENZOVO NIHALO (KLASIČNO)

Že leta 1895 sta Le Cornu in leta 1902 Lord Rayleigh prvič obravnavala ta problem.

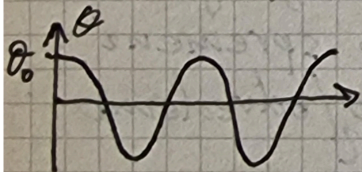
$l = l_0 = \text{konst.}$ $\qquad$ $l = l_0(1+\underbrace{\varepsilon t}_{\tau}) = l(t)$

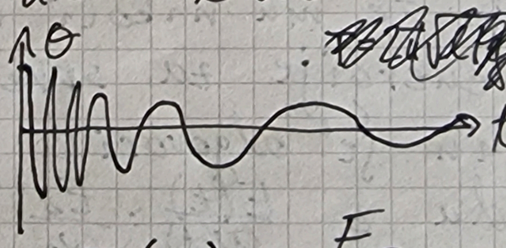




$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{l}\frac{dl}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{g}{l}\theta = 0$$





$$\frac{\delta l}{l} \ll 1$$

$$E = E_0 = mgl_0\cos\theta_0 = \text{konst.}$$

$$E(\tau) \approx \frac{E_0}{\sqrt{1+\tau}}$$

$$\omega(\tau) \approx \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\tau}}$$

$$\frac{E(\tau)}{\omega(\tau)} = \frac{E_0}{\omega_0} = \text{konst.}$$

KVANTNO NIHALO (HARMONSKI OSCILATOR)

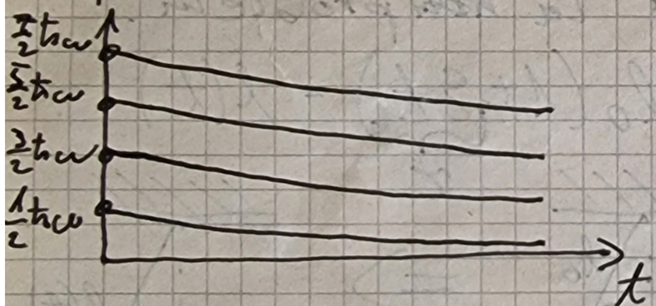
$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Če $\omega = \omega(t) \rightarrow E_n = E_n(t) = \hbar\omega(t)\left(n + \frac{1}{2}\right)$

Samo določeni načini nihanja so dovoljeni, prehajanje med njimi zahteva izmenjavo kvanta energije: $n_z \rightarrow n_k$

$$\Delta E = E_{n_k} - E_{n_z} = \hbar\omega(n_k - n_z)$$

HO ima torej časovno odvisni energijski spekter:



MALO ZGODOVINE:

Na prvi konferenci v Solvayu l. 1911 je Lorentz vprašal Einsteina po njegovem predavanju o kvantni mehaniki: Predpostavimo neskončno počasno spreminjanje $\omega(t)$. Kako je potem možno da kvantno nihalo spremeni energijo, če mu nikoli ne dovedemo/odvedemo dovolj energije za spremeniti n?

Einstein je odgovoril da bi se ω spremenila v skladu z $\frac{E(t)}{\omega(t)} = \frac{E_0}{\omega_0}$.

KVANTNI ADIABATNI TEOREM:

Fizikalni sistem ostane v takojšnjem stanju, če je dana motnja dovolj počasna in obstaja energijska vrzel med njim in preostalim spektrom.

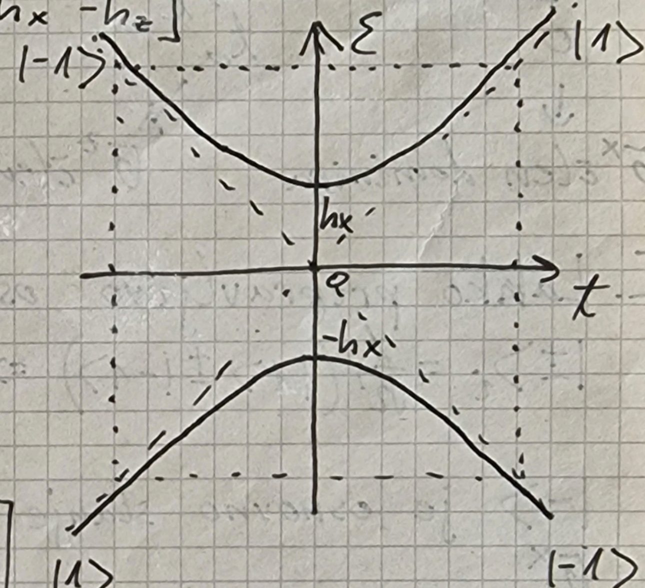
1 KUBIT: ~~[illegible]~~ bazni stanji h_z : $|\pm 1\rangle$

$h_z(t) = t$ ~~[illegible]~~ $\qquad \sigma^z |\pm 1\rangle = \pm 1 |\pm 1\rangle$

$$H(t) = h_x \sigma^x + h_z \sigma^z = \begin{bmatrix} h_z & h_x \\ h_x & -h_z \end{bmatrix}$$

$$\det\left(H(t) - \mathcal{E}\,\mathbb{1}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} h_z - \mathcal{E} & h_x \\ h_x & -h_z - \mathcal{E} \end{bmatrix} = 0$$



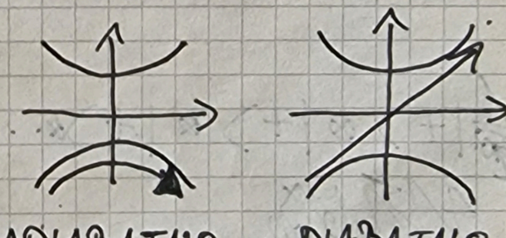
$$-(h_z - \mathcal{E})(h_z + \mathcal{E}) - h_x^2 = 0$$

$$-h_z^2 + \mathcal{E}^2 - h_x^2 = 0$$

$$\mathcal{E}^2 = h_z^2 + h_x^2$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{1,2} = \pm\sqrt{h_z^2(t) + h_x^2}}$$

takojšni stanji

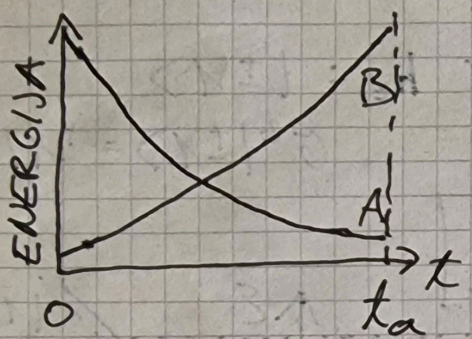


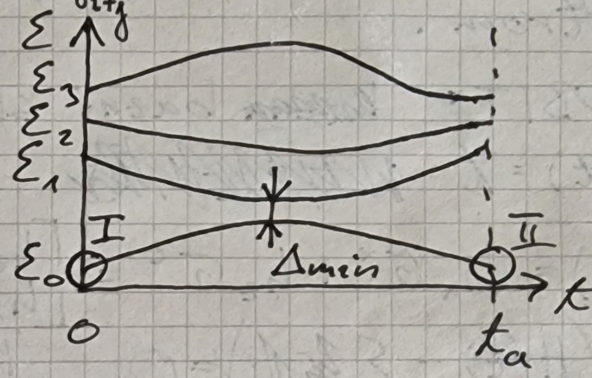
ADIABATNO "počasi" DIABATNO "hitro"

VEČ KUBITOV

primer realne naprave: D-Wave kvantni žarilnik

$$H(t) = -\frac{A(t)}{2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^x + \frac{B(t)}{2}\left[\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} J_{ij}\,\sigma_i^z\sigma_j^z + \sum_{i=1}^{N} h_i\sigma_i^z\right]$$





$\downarrow$ σ^x člen dominira $\qquad\searrow$ σ^z člen dominira

I. ~~Lakako~~ Lahko pripravljivo osnovno stanje σ^x

$$|\pm\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle \pm |-1\rangle\right) \Rightarrow E_\pm = \langle \pm | \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} | \pm \rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$|-\rangle$ je osnovno stanje σ^x.

$$E_+ = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$E_- = \frac{1}{2}(-1-1) = -1$$

$\frac{1}{\sqrt{2^N}}|+\rangle\otimes|+\rangle\otimes|+\rangle\otimes\cdots\otimes|+\rangle$ je osnovno stanje $-\sum_i \sigma_i^x$, kar je superpozicija vseh možnih stanj

$$\frac{1}{\sqrt{2^N}}\otimes^N|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^N}}\sum_{i=1}^{2^N}|i\rangle \quad ; \quad |i\rangle \text{ binarna številka}$$

$|0\ldots00\rangle$

$|0\ldots01\rangle$

$|0\ldots10\rangle$

$|0\ldots11\rangle$

$\vdots$

$|1\rangle = |1\rangle$

$|0\rangle = |-1\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |-1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |-1\rangle) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^2}}\left(|-1-1\rangle + |-1\,1\rangle + |1-1\rangle + |11\rangle\right)$$

II Rešitev optimizacijskega problema prevedemo v osnovno stanje σ^z člena.

Δ_{min} - najmanjša energijska vrzel med osnovnim in prvim vzbujenim stanjem.

Če $H(t)$ spremenimo dovolj počasi iz σ^x v σ^z dominiran člen, potem na koncu adiabatnega procesa (računanja) izmerimo rešitev optimizacijskega problema.

Kaj pomeni dovolj počasi?

$$\boxed{t_a \gg \frac{\hbar \Sigma}{\Delta_{min}^2}} \quad ; \quad \Sigma = \max_t \left|\langle \varepsilon_1 | \frac{dH}{ds} | \varepsilon_0 \rangle\right|, \quad s = \frac{t}{t_a}$$

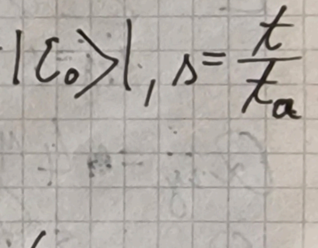
$\Delta_{min} \propto N^p$ ali $\exp(pN)$

Kje se skriva prednost kvantnega računalništva v primerjavi s klasičnim?

TTS - time to solution

Klasični algoritmi v primeru težkih problemov (NP-hard)

$$TTS \approx \underbrace{a_K \exp(b_K N)}_{\text{konst.}}$$



Adiabatno kv. rač.

realistično

$TTS \approx t_a \approx a_Q \exp(b_Q N)$ $\quad b_a < b_K$

v najboljšem primeru $TTS \approx a_Q N^{b_a}$

2. KAKO RAČUNATI Z ADIABATNIMI KVANTNIMI RAČUNALNIKI?

UVOD V QUBO

Rešitev želenega optimizacijskega problema moramo prevesti v osnovno stanje σ^z člena.

Ising formulacija: $E = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} J_{ij} \cdot \sigma_i^z \sigma_j^z + \sum_{i=0}^{N} h_i \cdot \sigma_i^z$

$$\sigma_i^z \, |\pm 1\rangle_i = \pm 1 \, |\pm 1\rangle$$

QUBO formulacija

(Quadratic Unconstrained Binary Optimization

$$E = \sum_{i,j=1}^{N} Q_{ij} \, x_i x_j \qquad x_i = \frac{1}{2}(1 + \sigma_i^z)$$

$$x_i |0\rangle_i = 0 |0\rangle_i \quad (|-1\rangle)$$

$$x_i |1\rangle_i = 1 |1\rangle_i \quad (|1\rangle)$$

$$Q_{ij} = 4 J_{ij} \, ; \; i \neq j$$

$$Q_{ii} = \sum_j 4 J_{ij} + 2 h_i$$

Recimo, da imata x_i in x_j odnos:

- prijateljski: $E = 1 - x_i x_j$

$x_i x_j$	00	01	10	11
E	1	1	1	$\boxed{0}$ osnovno stanje

- nevtralni: $E = 1$

$x_i x_j$	00	01	10	11
E	1	1	1	1

osnovna stanja

- antagonistični: $E = 1 + x_i x_j$

$x_i x_j$	00	01	10	11
E	1	1	1	2

osnovna stanja

Recimo, da mora biti samo ena od x_i, $i = 1, \dots, N$, enaka 1 in ostale 0.

$$h = \left(1 - \sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

tak izraz moramo poenostaviti, da ga lahko spravimo v $H(t)$.

$$h = 1 - \sum_{i=1}^{N} 2x_i + \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right) = (x_1 + \dots + x_N)(x_1 + \dots + x_N) =$$

$$= \begin{array}{c|ccc} & x_1 & \dots & x_N \\ \hline x_1 & x_1 x_1 & \dots & x_1 x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & x_N x_1 & \dots & x_N x_N \end{array} = \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ j<i}}^{N} 2 x_i x_j$$

$x_i^2 = x_i$

$\times 2$

$$h = 1 - \sum_{i=1}^{N} \cancel{2} x_i + \cancel{\sum_{i=1}^{N} x_i} + \sum_{\substack{i=1 \\ j<i}}^{N} 2 x_i x_j \Rightarrow Q_{ii} = -1$$

$$Q_{ij} = 2$$