Diskretne strukture UNI, 30.10.2024

1. Preveri pravilnost sklepov s pomočjo pogojnega sklepa.

   (a) $p \Rightarrow (q \vee r), \neg r \models p \Rightarrow q$,

   (b) $p \vee q \Rightarrow r \wedge s, r \vee t \Rightarrow u \models p \Rightarrow u$,

   (c) $p \Rightarrow q \vee r, q \Rightarrow \neg p, \neg(s \wedge r) \models p \Rightarrow \neg s$,

   (d) $s \wedge (p \Rightarrow t), t \Rightarrow (q \vee r) \models p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$,

   (e) $\models (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$,

(a)
1. $p \Rightarrow q \vee r$ pred.
2. $\neg r$ pred.
3. $\neg p \vee q \vee r$ ~ (1)
4. $\neg p \vee q$ DS(3, 2)
5. $p \Rightarrow q$ ~ (4)

($\models p \Rightarrow z$)

$A \vee B, \neg B \models A$ DS

Pogojni sklep: Sklep $A_1, A_2, \dots, A_n \models B \Rightarrow C$ je pravilen, če in samo če je pravilen sklep $A_1, \dots, A_n, B \models C$.

Še dokaz z uporabo pog. sklepa:

1. $p \Rightarrow q \vee r$ pred.
2. $\neg r$ pred.
3. 1. p pred. PS
   2. $q \vee r$ MP(1, 3.1)
   3. q DS(3.2, 2)
3. $p \Rightarrow q$ PS(3.1, 3.3)

($\models p \Rightarrow z$)

$A \Rightarrow B, A \models B$ MP

(b)
1. $p \vee q \Rightarrow r \wedge s$ pred. (~1)
2. $r \vee t \Rightarrow u$ pred.
3. 1. p pred. PS
   2. $p \vee q$ Pd(3.1)
   3. $r \wedge s$ MP(3,2, 1)
   4. r Po(3,3)
   5. $r \vee t$ Pd(3.4)
   6. u MP(3.5, 2)
3. $p \Rightarrow u$ PS(3.1, 3.6)

($\models p \Rightarrow u$, 2 0)

Ali ima ta sklep protiprimer?

$A \models A \vee B$ Pd
$A \wedge B \models A$ Po

$p \sim 1, u \sim 0, r \sim 1, s \sim 1 \dots$

Nima protiprimera.

(d) 1. $s \wedge (p \Rightarrow t)$ pred.
2. $t \Rightarrow q \vee r$ pred.
3.1. p pred. PS
3.2.1. $\neg q$ pred. PS
3.2.2. $p \Rightarrow t$ $P_0(1)$
3.2.3. t MP(3.1, 3.2.2)
3.2.4. $q \vee r$ MP(2, 3.2.3)
3.2.5. r DS(3.2.1, 3.2.4)
3.2. $\neg q \Rightarrow r$ PS(3.2.1, 3.2.5)
3. $p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$ PS(3.1, 3.2)

$(\vDash p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r))$

2. Preveri pravilnost sklepov s pomočjo dokaza s protislovjem (*reductio ad absurdum*).

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), s \wedge q \Rightarrow t, \neg t \vDash \neg(p \wedge r)$,

(b) $p \vee q, p \Rightarrow r, q \Rightarrow s \vDash r \vee s$,

(c) $p \veebar q, p \vee r, r \Rightarrow s, \neg(q \wedge s) \vDash p$,

(d) $p \Rightarrow r \wedge t, t \vee s \Rightarrow \neg q \vDash \neg(p \wedge q)$,

(e) $p \Leftrightarrow q, r \vee s \Rightarrow p, s \vee t, \neg t \vee r \vDash q$,

Dokaz s protislovjem: Sklep $A_1, \ldots, A_n \vDash B$ je pravilen, če in samo če je pravilen sklep

$$A_1, \ldots, A_n, \neg B \vDash 0.$$

(b) 1. $p \vee q$ pred.
2. $p \Rightarrow r$ pred.
3. $q \Rightarrow s$ pred.
4.1. $\neg(r \vee s)$ pred. RA
4.2. $\neg r \wedge \neg s$ ~(4.1)
4.3. $\neg r$ $P_0(4.2)$
4.4. $\neg p$ MP(4.3, 2)
4.5. $\neg s$ $P_0(4.2)$
4.6. $\neg q$ MP(4.5, 3)
4.7. $\neg p \wedge \neg q$ Zd(4.4, 4.6)
4.8. $(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$ Zd(1, 4.7)
4.9. 0 ~(4.8)
4. $r \vee s$ RA(4.1, 4.9)

$(\vDash r \vee s)$

$A \Rightarrow B, \neg B \vDash \neg A$ MP

$B \sim B \vee 0 \sim \neg B \Rightarrow 0$

Še drugače:

$r \vee s \sim \neg r \Rightarrow s \sim \neg s \Rightarrow r$

$(\models r \vee s)$

1.	$p \vee q$	pred.
2.	$p \Rightarrow r$	pred.
3.	$q \Rightarrow s$	pred.
4.1.	$\neg r$	pred. PS
4.2.	$\neg p$	MT(2, 4.1)
4.3.	q	DS(1, 4.2)
4.4.	s	MP(4.3, 3)
4.	$\neg r \Rightarrow s$	PS(4.1, 4.4)
5.	$r \vee s$	$\sim$ (4)

(c)

$(\models p)$ — 0, 2

1.	$p \vee q$ ~ 1	pred.
2.	$p \vee r$ ~ 1	pred.
3.	$r \Rightarrow s$ ~ 1	pred.
4.	$\neg(q \wedge s)$ ~ 0	pred.
5.1.	$\neg p$	pred. RA
5.2.	r	DS(5.1, 2)
5.3.	s	MP(5.2, 3)
5.4.	$\neg q \vee \neg s$	$\sim$ (4)
5.5.	$\neg q$	DS(5.3, 5.4)
5.6.	$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$	$\sim$ (1)
5.7.	$p \vee q$	P_0 (5.6)
5.8.	p	DS(5.7, 5.5)
5.9.	$\neg p \wedge p$	Zd(5.1, 5.8)
5.10.	0	$\sim$ (5.9)
5.	p	RA(5.1, 5.10)

Ali ima ta sklep protiprimer?

$p \sim 0, q \sim 1, r \sim 1, s \sim 1$

Ne gre ... nima protiprimera.

$A, B \models A \wedge B$ Zd

3. Preveri pravilnost sklepov.

(a) $p \vee s \Rightarrow \neg t \wedge u, t \vee (u \Rightarrow p), p \wedge q \Rightarrow r \vee \neg u \models q \Rightarrow p \wedge r$

(b) $p \Rightarrow t \vee r, q \Rightarrow t \vee s, r \Rightarrow \neg s \models p \wedge q \Rightarrow t$

(a) Ali ima protiprimer? $q \sim 1$, $p \sim 0$, $t \sim 1$, $s \sim 1$, vrednosti ostali izj. spremenljivk niso pomembne, ima protiprimer.

Ta sklep ni pravilen.

(b) Ali ima protiprimer? $t \sim 0$, $p \sim 1$, $q \sim 1$, $r \sim 1$, $s \sim 1$ Ne gre ...

Nima protiprimera.

Zapišimo dokaz:

($\models p \wedge q \Rightarrow t$)

1. $p \Rightarrow t \vee r$ pred.
2. $q \Rightarrow t \vee s$ pred.
3. $r \Rightarrow \neg s$ pred.
4.1. $p \wedge q$ pred. PS
4.2. p $P_0(4.1)$
4.3. $t \vee r$ MP(1, 4.2)
4.4. q $P_0(4.1)$
4.5. $t \vee s$ MP(2, 4.4)
4.6. $t \vee (r \wedge s)$ Zd(4.3, 4.5)
4.7. $\neg(r \wedge s)$ ~(3)
4.8. t DS(4.6, 4.7)
4. $p \wedge q \Rightarrow t$ PS(4.1, 4.8)

Ali drugače:

4.6.1. $\neg t$ pred. RA
4.6.2. s DS(4.6.1, 4.5)
4.6.3. $\neg r$ MT(3, 4.6.2)
4.6.4. t DS(4.3, 4.6.3)
4.6.5. $\neg t \wedge t$ Zd(4.6.1, 4.6.4)
4.6.6. 0 ~(4.6.5)
4.6. t RA(4.6.1, 4.6.6)
4. $p \wedge q \Rightarrow t$ PS(4.1, 4.6)

(g) $p \Rightarrow (q \Rightarrow s), p \Rightarrow (r \Rightarrow t), \neg t \vee \neg s \models p \Rightarrow (\neg r \vee \neg q)$

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow s)$	pred.
2. $p \Rightarrow (r \Rightarrow t)$	pred.
3. $\neg t \vee \neg s$	pred.
4.1. p	pred. PS
4.2. $q \Rightarrow s$	MP(4.1, 1)
4.3. $r \Rightarrow t$	MP(4.1, 2)
4.4.1. r	pred. PS
4.4.2. t	MP(4.4.1, 4.3)
4.4.3. $\neg s$	DS(4.4.2, 3)
4.4.4. $\neg q$	MT(4.2, 4.4.3)
4.4. $r \Rightarrow \neg q$	PS(4.4.1, 4.4.4)
4. $p \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q)$	PS(4.1, 4.4)
5. $p \Rightarrow (\neg r \vee \neg q)$	~(4)

$(\models p \Rightarrow (\neg r \vee \neg q))$

$p \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q)$