PREDAVANJA 5

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Vrstni red seštevanje v vrsti je pomemben!

Primer: $a_n = (1, -1, 1, -1, \dots)$ $S_n: 1, 0, 1, 0, \dots$

preuredimo

$\tilde{a}_n = (1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ $S_n: 1, 2, 1, 2, \dots$

$\boxed{\text{ZGLED}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ?$$

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \quad S_3 = \dots = \frac{3}{4}$$

$S_n \overset{?}{=} \frac{n}{n+1}$ pokažemo z indukcijo

$$? = S = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

GEOMETRIJSKA VRSTA

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

- če $|q| < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira
- če $|q| \geq 1 \Rightarrow$ vrsta divergira

Za $|q| < 1$ velja

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

<u>ZGLED</u>

1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 6$$

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

PRAVILA ZA RAČUNANJE Z VRSTAMI

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ dve konvergentni vrsti.

Potem sta konvergentni tudi

- $\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = c \cdot a$, za $c \in \mathbb{R}$

- $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n = a \pm b$

Dokaz za 2. točko:

$$S_m := \sum_{n=0}^{m} a_n \,, \quad S_m' := \sum_{n=0}^{m} b_n \,, \quad S_m'' := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

Vemo, da velja $S_m'' = S_m + S_m'$ (m je končen!)

$$\lim_{m\to\infty} S_m'' = \lim_{m\to\infty} (S_m \pm S_m') = \lim_{m\to\infty} S_m \pm \lim_{m\to\infty} S_m'$$
$$= a \pm b$$

DEF.: Naj bosta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ vrsti z nenegativnimi členi in naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja
$$a_n \leq b_n.$$
Temu pravimo, da vrsta $\sum b_n$ **dominira** vrsto $\sum a_n$.

TRDITEV:
- Če $\sum b_n$ konvergentna $\Rightarrow \sum a_n$ konvergentna
- Če $\sum a_n$ divergentna $\Rightarrow \sum b_n$ divergentna

DOKAZ (1. točke): $S_m := \sum_{n=0}^{m} a_n$, $S_m' := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

- zaporedje $(S_m)_m$ je naraščajoče ($a_n \geq 0$)
- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ je konvergentno, torej $(S_m')_m$ omejeno

- Iz $a_n \leq b_n$ sledi $S_m \leq S_m'$ za vsak m. Torej je tudi $(S_m)_m$ omejeno.

- Po izreku o monotoni konvergenci zaporedij je zaporedje $(S_m)_m$ konvergentno in $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentna. $\square$

KVOCIENTNI KRITERIJ

IZREK: $\sum a_n$ je vrsta s pozitivni členi. Tvorimo novo zaporedje

$$D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

1. Če obstaja $q < 1$, tako da za vsak n od nekega n_0 naprej velja
$$D_n \leq q,$$
potem vrsta konvergira.

2. Za vsak n od nekega n_0 naprej velja
$$D_n \geq 1,$$
potem vrsta divergira.

3. Naj obstaja limita $\lim_{n\to\infty} D_n = D$.

3.1. $D < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira

3.2. $D = 1 \Rightarrow$ ne moremo sklepati o konvergenci

3.3. $D > 1 \Rightarrow$ vrsta divergira.

PRIMER: Za katere $x > 0$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ konvergira?

$$D_n = \frac{(n+1)\, x^{(n+1)}}{n\, x^n} = \frac{n+1}{n} \cdot x$$

Konvergira za $x < 1$, saj za dovolj velik n velja $D_n = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\substack{\wedge \\ \frac{1}{x}}} \cdot x < 1$

DOKAZ (točke 1):
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0 - 1} a_n}_{\text{ne vpliva na konvergenco}} + \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n}_{\text{vplive na konvergenco}}$$

- $a_{n+1} = D_n a_n$ velja za vsak n. Uporabim to zvezo večkrat: $a_{n+1} = D_n (D_{n-1} a_{n-1}) = D_n D_{n-1} D_{n-2} a_{n-2} \ldots$

Torej velja
$$a_{n+k} = \underbrace{D_{n+k-1}}_{\substack{\wedge\\ 2}} \underbrace{D_{n+k-2}}_{\substack{\wedge\\ 2}} \cdots \underbrace{D_n}_{\substack{\wedge\\ 2}} a_n$$

- Ocenimo $a_{n_0+k} \leq q \cdot a_{n_0+k-1} \ldots \leq q^k a_{n_0}$, saj velja $D_n \leq q$
- vrsta $\underbrace{a_{n_0} + q\, a_{n_0} + q^2 a_{n_0} + q^3 a_{n_0} + \ldots}_{(*)}$ dominira vrsto $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + a_{n_0+3} + \ldots$
- Vrsta (*) je geometrijska vrsta s kvocientom $q < 1$, ki konvergira.
- Ker (*) konvergira, potem konvergira tudi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. (zaradi (♥)).

KORENSKI KRITERIJ

IZREK: Naj bo $\sum a_n$ vrsta z nenegativnimi členi. Tvorimo zaporedje

$$c_n := \sqrt[n]{a_n}.$$

1. Če obstaja $q < 1$, tako da za za vsak n od nekega n_0 naprej velja
$$c_n \leq q,$$
potem vrsta konvergira.
2. Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja

$$c_n \geq 1,$$

potem vrsta divergire.

3. Naj obstaje $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

3.1. $c < 1 \Rightarrow$ vrsta konvergira

3.2. $c = 1 \Rightarrow$ ne moremo soditi

3.3. $c \geq 1 \Rightarrow$ vrsta divergire

ZGLED: Za katere $x > 0$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ konvergira?

$$c_n = \sqrt[n]{\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{x}{n}$$

Konvergira za $\forall x > 0$, ker $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ (x je konstanta)

LEIBNITZOV KRITERIJ

IZREK: Če

- $a_n \geq 0$
- $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

potem $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergire.

DOKAZ:

- $\overset{(*)}{S_{2n} \leq S_{2n-2}}$ $\left(\text{ker } S_{2n} = S_{2n-2} \overbrace{- a_{2n-1} + a_{2n}}^{\leq 0} \right)$, torej $(S_{2n})_n$ je padajoče

- $S_{2n+1} \geq S_{2n-1}$ $\left(\text{ker } S_{2n+1} = S_{2n-1} \overbrace{+ a_{2n} - a_{2n+1}}^{\geq 0} \right)$ torej $(S_{2n+1})_n$ je naraščajoče

- $S_{2n+1} \overset{(*)}{\leq} S_{2n} \overset{(*)}{\leq} S_0$

  (*) ker $S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}$

  $\Rightarrow (S_{2n+1})_n$ je navzgor omejeno, torej konv.

- Podobno vidimo, da je S_{2n} navzdol omejeno, torej konvergentno.

- Velja $\lim S_{2n} - \lim S_{2n+1} = \lim (S_{2n} - S_{2n+1})$
  $= \lim a_{2n+1} = 0$

Torej $\lim S_{2n} = \lim S_{2n+1}$ in tudi $(S_n)_n$ je konvergentno.

ZGLED: Alternirajoča harmonična vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

konvergira, ker
- $a_n = \frac{1}{n} \geq 0$ ✓
- $a_{n+1} \leq a_n$, ker $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ ✓
- $\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$ ✓

IZPIT 1 (19/20)

1. Obravnavajte konvergenco zaporedij

a) $b_0 = 0$, $b_n = b_{n-1} + \frac{1}{n}$ za $n \geq 1$.

ODG: delne vsote harmoničnega zaporedja, ki divergira

b) $c_0 = 0$, $c_n = c_{n-1} + (-1)^n \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ za $n \geq 1$, če vemo, da $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ monotono narašča proti e.

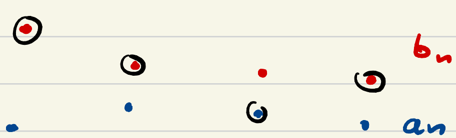
ODG:
- $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 0$ ✓
- $a_{n+1} \leq a_n$ ✓
- $e - \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0$ ✓

To zaporedje konv.

IZPIT 2 (19/20)

1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$

Tvorimo novo zaporedje $(c_n)_n$, kjer je $c_n \in \{a_n, b_n\}$. Navzgor in navzdol ocenite/omejite vsoto vrste $\sum c_n$ s pomočjo A, B, če vemo, da $a_n \leq b_n$.



Ker velja $a_n \leq b_n$, za $\sum c_n$ dobimo največ,
če vzamemo $c_n = b_n$; za $\sum c_n$ dobimo najmanj,
če vzamemo $c_n = a_n$.

Torej $A \leq \sum c_n \leq B$.

FUNKCIJE ENE SPREMENLJIVKE

Funkcija je predpis, ki vsakemu elementu x
iz definicijskega območja $D_f \subset \mathbb{R}$ priredi
natanko določeno število $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$f: D_f \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

Če D_f ne podamo, je D_f največja množica,
za katero ima predpis f smisel.

x ... neodvisna spremenljivka
$f(x) = y$ ... odvisna spremenljivka

- $F(A) = \{ f(x) \, ; \, x \in A \}$ ... slika množice $A \subset D_f$
- $Z_f = f(D_f)$ ... zaloga vrednosti funk. f
- $f^{-1}(B) = \{ x \, ; \, f(x) = B \}$ ... praslika množice $B \subset Z_f$