Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

20. november 2024

Moč končnih množic

Naj bo A končna množica. Potem $|A|$ označuje *število elementov* ali *moč* množice A.

Naj bosta A in B končni množici. Pravimo, da sta A in B *enako močni*, $A \sim B$, če $|A| = |B|$.

Zgledi:

1. $|\emptyset| = 0$
2. $|\{0, 1\}| = 2$
3. $|\{\{0, 1\}\}| = 1$

Moč končnih množic

Trditev

Naj bodo A, B, C končne množice.

1. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
2. $|\{f \; ; \; f : A \to B\}| = \left|B^A\right| = |B|^{|A|}$
3. $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$
4. *Če je $B \subseteq A$, potem je $|A \setminus B| = |A| - |B|$.*

   V splošnem je $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.
5. *Če je $A \cap B = \emptyset$, potem je $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

   V splošnem je $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
6. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Načelo vključitev in izključitev

Izrek

Naj bo A končna množica in $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$. Potem je

$$
\begin{array}{rl}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \; = & \\
 & |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \\
- & |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
+ & \ldots \\
 & \ldots \\
+(-1)^{n+1} & |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
= & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i,
\end{array}
$$

kjer je $S_k = \displaystyle\sum_{\substack{\mathcal{J} \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |\mathcal{J}|=k}} \left| \bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i \right|.$

Naloga

Naloga: Koliko je števil na celoštevilskem intervalu $[1 \ldots 96]$, ki so deljiva s 6 in niso deljiva niti s 24 niti z 32?

Dirichletov princip

Izrek

Naj bo A končna množica in $f : A \to A$. Potem so naslednje trditve enakovredne:

- *f je injektivna.*
- *f je surjektivna.*
- *f je bijektivna.*