9. PREDAVANJA

Taylorjev polinom v okolici točke x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(f(x)),$$

kjer je $R_n(f(x)) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\underbrace{(x-x_0)^{n+1}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$ (če x dovolj blizu x_0)

za $c \in (x_0, x)$

Analitične funkcije so natanko tiste, ki se jih da lokalno opisati s konvergentno Taylorjevo vrsto (polinomi, log, exp, trigonometrične, ...)

Taylorjev polinom st. n za polinom $f(x)$ st. n je kar nazaj isti polinom.

Povezava med exp, sin, cos : $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$

$$e^{ix} = \cancel{1} + \cancel{ix} + \cancel{\frac{(ix)^2}{2}} + \dots$$

$$i \sin x = i\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\cos x = \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \dots$$

ODVODI FUNKCIJ DVEH SPREMENLJIVK

$f(x,y)$ je zvezna funkcija v (a,b)

Parcialna odvoda sta:

$$f_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$f_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Parcialni odvod v x v točki (a,b):

- je enak smernemu koeficientu tangente pri x_0 na krivuljo, ki jo dobimo, če graf funkcije prerežemo vzdolž ravnine $y=b$
- opisuje gibanje funkcijskih vrednosti ob majhnem premiku iz točke (a,b) v smeri x.

KOMETAR: Podobno definiramo parcialne odvode funkcije $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v točki $(a_1, \dots, a_n)$:

$$f_{x_i}(a_1,\dots,a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_n) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_i+h,\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n)}{h}$$

PRIMER: 1) $g(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$

$$g_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \dots = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

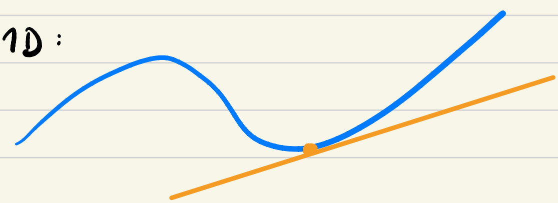
$$g_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \dots = \frac{x}{x^2+y^2}$$

2) $h(x,y,z) = y \cdot \sin(x+2z)$

$$h_x(x,y,z) = y \cdot \cos(x+2z)$$
$$h_y(x,y,z) = \sin(x+2z)$$
$$h_z(x,y,z) = y \cdot \cos(x+2z) \cdot 2$$

Diferenciabilnost funkcije dveh spremenljivk

v 1D:



Funkcija $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferenciabilna v točki (a,b), če je

$$f(a+h_1, b+h_2) \approx \underbrace{f(a,b) + f_x(a,b) \cdot h_1 + f_y(a,b) \cdot h_2}_{\text{tangentna ravnina}}$$

Izrek: Če parcialne odvode f_x in f_y v neki okolici točke (a,b) obstajata in sta zvezni funkciji, potem je f v točki (a,b) diferenciabilna.

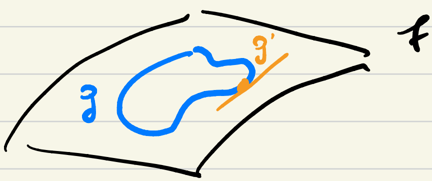
Odvajanje funkcije dveh spremenljivk po parametru:

- $f(x,y)$ naj bo parcialno odvedljiva in odvoda sta zvezni funkciji,
- $x(t)$, $y(t)$ naj bosta zvezno odvedljivi funkciji spremenljivke t.

Za $g(t) := f(x(t), y(t))$ velja, da je zvezno odvedljiva po t in

$$\boxed{g'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)}$$

Uporaba:



Izračun odvoda krivulje na ploskvi f

PRIMER: Iz točke $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ se premaknemo vzdolž enotske krožnice $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$. Ali bo vrednost funkcije $f(x,y) = 3 + x^2 - y^2$ ob tem narastla ali padla?

Določiti želimo $g'(t_0)$, kjer je
$g(t) = f(x(t), y(t)) = 3 + \cos^2(t) - \sin^2(t)$
in $t_0 = \frac{\pi}{3}$.

Uporabimo formulo:

$$g'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0)$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x \\ f_y(x,y) &= -2y \\ x'(t) &= -\sin(t) \\ y'(t) &= \cos(t) \end{aligned}\right\}$$

$$= 2x(t_0) \cdot (-\sin t_0) - 2y(t_0) \cdot \cos(t_0)$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = -\sqrt{3}$$

Ker je $g'(t_0) < 0$, bo funkcija padala.

(Lahko bi rešili tudi direktno preko odvajanja po t funkcije
$g(t) = 3 + \cos^2(t) - \sin^2(t)$)

PRIMER 2: $f(x,y) = x^2 + y^3$, $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$

a) direktno: $g(t) = \sin^2(t) + \cos^3(t)$
$g'(t) = 2\sin(t)\cos(t) + 3\cos^2(t)(-\sin(t))$

$\Downarrow$

b) verižno pravilo: $g'(t) = 2x \cdot x' + 3y^2 \cdot y'$ $\quad \| \checkmark$
$= 2\sin(t)\cos(t) +$
$3\cos^2(t)(-\sin(t))$

Gradient funkcije $f(x,y)$ v (x_0,y_0) je vektor $\boxed{\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = \left(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)\right)}$

Smerni odvod $f(x,y)$:

enačbe premice v ravnini

Naj bo f parcialno odvedljiva in $\overbrace{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + t e_1 \\ y(t) &= y_0 + t e_2 \end{aligned}}$

(x_0,y_0) (e_1,e_2)

Odvod sestavljenje funkcije je pri $t=0$:

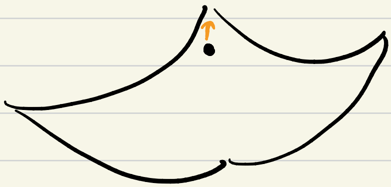
$\vec{e} = (e_1,e_2)$

$$\boxed{\begin{aligned} g'(0) &= f_x(x_0,y_0)\cdot e_1 + f_y(x_0,y_0)\cdot e_2 \\ &= \operatorname{grad} f(x_0,y_0)\cdot \vec{e} \\ &=: f_{\vec{e}}(x_0,y_0) \end{aligned}}$$

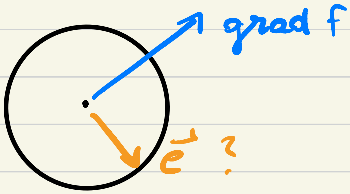
Takemu odvodu pravimo smerni odvod funkcije f v smeri vektorja $\vec{e}$ v točki (x_0,y_0).

Velja:
- $f_{\vec{e}} = f_x$, če je $\vec{e} = (1,0)$
- $f_{\vec{e}} = f_y$, če je $\vec{e} = (0,1)$

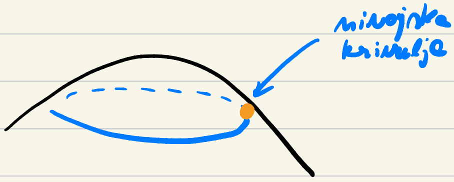
V kateri smeri se moramo premakniti iz točke (x_0, y_0) na ploskvi, da bo vrednost $f(x,y)$ najhitreje narasla?



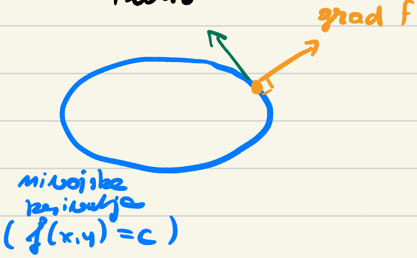
Določiti moramo $\vec{e}$, da bo $|g'(0)|$ čim večji



Smerni odvod ima največjo absolutno vrednost, če $\vec{e}$ kaže v smeri gradienta (grad $f(x_0, y_0)$). Smerni odvod je enak 0, če $\vec{e}$ kaže pravokotno v smeri gradienta.



Tloris:



Pomen odvodov

- če je $\left\{\begin{matrix} f_x(x_0,y_0) > 0 \\ f_y(x_0,y_0) > 0 \end{matrix}\right\}$, f ob majhni spremembi iz točke (x_0,y_0) v smeri osi $\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}$ narašča.

- Če pa sta odvoda negativne, potem f pade.

- Če je $\left\{\begin{matrix} f_{\vec{e}}(x_0,y_0) > 0 \\ f_{\vec{e}}(x_0,y_0) < 0 \end{matrix}\right\}$, potem f ob majhni spremembi iz x_0 v smeri vektorja $\vec{e}$ $\left\{\begin{matrix} \text{narašča} \\ \text{pada} \end{matrix}\right\}$.

PRIMER: $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$

Ali f v točki $(2,-1)$ v smeri $(1,-1)$ narašča ali pada?

$$\vec{e} = (1,-1)$$

$$f_{\vec{e}}(2,-1) = f_x(2,-1)\cdot 1 + f_y(2,-1)\cdot(-1)$$

$$= (2x+2y)\big|_{x=2,y=-1}\cdot 1 + (2x-2y)\big|_{x=2,y=-1}\cdot(-1)$$

$$= 2\cdot 1 + 6\cdot(-1) = -4$$

Torej f pada.

PRIMER 2: Za funkcijo $f(x,y) = x^2 - 2x + y$
- zapišite gradient v $(0,0)$,
- določite nivojsko krivuljo, ki gre skozi $(0,0)$,
- zapišite enačbo tangente in normale na nivojsko krivuljo v $(0,0)$.

Gradient: $\operatorname{grad} f(0,0) = (2x-2, 1)\Big|_{x=0,\,y=0} = (-2,1)$

Nivojske krivulje: $f(x,y) = 0$

$x^2 - 2x + y = 0 \Rightarrow y = -x^2 + 2x$

$\boxed{\text{Tangento na krivuljo } (x(t), y(t)) \text{ v } t_0 \text{ dobimo kot } (x'(t_0), y'(t_0)).}$

V našem primeru je krivulja $(x, -x^2+2x)$, torej je smer tangente enaka $(1, -2x+2)\Big|_{x=0} = (1,2)$

Normala kaže v smeri gradienta, torej v smeri vektorja $(-2,1)$. Vidimo tudi, da velja $(1,2)\cdot(-2,1) = 0$ (grad $\perp$ tangenta)