Diskretne strukture VSP: prvi kolokvij

27. 11. 2024

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena.
Vse odgovore dobro utemelji!

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek ____________________ Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Trimestni izjavni veznik A je definiran z opisom

$$A(p,q,r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee r,$$

zaporedje izjavnih izrazov pa definiramo z začetnima členoma $A_1 = q \Rightarrow p$, $A_2 = p \wedge \neg q$ in pri $n \geq 3$ z rekurzivno zvezo

$$A_n = A(A_{n-2}, p, A_{n-1}).$$

a) (10 točk) Izračunaj prvih šest členov zaporedja $(A_i, i \in \mathbb{N})$.

$$A_3 = A(A_1, p, A_2) = A(q \Rightarrow p, p, p \wedge \neg q) = ((q \Rightarrow p) \Rightarrow p) \vee (p \wedge \neg q) \sim (\neg(\neg q \vee p) \vee p) \vee (p \wedge \neg q)$$

$$\sim ((q \wedge \neg p) \vee p) \vee (p \wedge \neg q) \sim ((q \vee p) \wedge (\underbrace{\neg p \vee p}_{\sim 1})) \vee (p \wedge \neg q) \sim (q \vee p) \vee (p \wedge \neg q) \sim$$

$$\sim (q \vee p \vee p) \wedge (\underbrace{q \vee p \vee \neg q}_{\sim 1}) \sim q \vee p$$

$$A_4 = A(A_2, p, A_3) = A(p \wedge \neg q, p, q \vee p) = ((p \wedge \neg q) \Rightarrow p) \vee (q \vee p) \sim (\neg(p \wedge \neg q) \vee p) \vee (q \vee p)$$

$$\sim (\underbrace{\neg p \vee q \vee p}_{1}) \vee (q \vee p) \sim 1$$

$$A_5 = A(A_3, p, A_4) = A(q \vee p, p, 1) = ((q \vee p) \Rightarrow p) \vee 1 \sim 1$$

b) (8 točk) Pokaži, da za vsako naravno število $k \geq 1$ velja trditev:
Če sta člena A_k in A_{k+1} tavtologiji, potem sta tudi člena A_{k+1} in A_{k+2} tavtologiji.

$$A_6 = A(A_4, p, A_5) = A(1, p, 1) = (1 \Rightarrow p) \vee 1 \sim 1$$

Predpostavka: $A_k \sim 1$, $A_{k+1} \sim 1$

$A_{k+1} \sim 1$ po predpostavki

$$A_{k+2} = A(A_k, p, A_{k+1}) = A(1, p, 1) = (1 \Rightarrow p) \vee 1 \sim 1$$

c) (7 točk) S pomočjo matematične indukcije izračunaj A_{2024}.

$\boxed{\text{IB}}$ Narejena v točki a)

$\boxed{\text{IK}}$ Narejen v točki b)

Lahko sklepamo, da je tudi A_{2024}.

2. naloga (25 točk)

Dan je sklep

$$\neg r \vee p, \quad r \vee s, \quad s \Rightarrow \neg p, \quad q \vee (r \Rightarrow s) \;\models\; p \Rightarrow q.$$

a) (15 točk) Preveri, da je sklep pravilen, in zapiši formalen dokaz tega sklepa.

$\neg r \vee p$	1	
$r \vee s$	1	$\boxed{r \sim 1}$
$s \Rightarrow \neg p$	1	$\boxed{s \sim 0}$
$q \vee (r \Rightarrow s)$	$\cancel{1}$	$0 \vee (1 \Rightarrow 0) \sim 0$
$p \Rightarrow q$	0	$\boxed{p \sim 1}$
		$\boxed{q \sim 0}$

NI PROTIPRIMERA

DOKAZ:

1. $\neg r \vee p$ — Pp1
2. $r \vee s$ — Pp2
3. $s \Rightarrow \neg p$ — Pp3
4. $q \vee (r \Rightarrow s)$ — Pp4
   - 5.1 p — PS
   - 5.2 $\neg s$ — MT(3, 5.1)
   - 5.3 r — DS(2, 5.2)
   - 5.4 $r \wedge \neg s$ — Zd(5.2, 5.3)
   - 5.5 $\neg(\neg r \vee s)$ — $\sim$ (5.4)
   - 5.6 $\neg(r \Rightarrow s)$ — $\sim$ (5.5)
   - 5.7 q — DS(4, 5.6)
5. $p \Rightarrow q$ — PS(5.1, 5.7)

b) (10 točk) Ali sklep ostane pravilen, če zaključek $p \Rightarrow q$ zamenjamo s $p \vee q$? Zakaj?

$\neg r \vee p$	1	$\boxed{r \sim 0}$
$r \vee s$	1	$\boxed{s \sim 1}$
$s \Rightarrow \neg p$	1	$1 \Rightarrow 1 \sim 1$ ✓
$q \vee (r \Rightarrow s)$	1	$0 \vee (0 \Rightarrow 1) \sim 1$ ✓
$p \vee q$	0	$\boxed{p \sim 0}$
		$\boxed{q \sim 0}$

PROTIPRIMER: $r \sim 0$
$s \sim 1$
$p \sim 0$
$q \sim 0$

3. naloga (25 točk)

V področju pogovora *živalskih vrst* uporabimo predikate R, A, H z naslednjimi pomeni:

$A(x) \ldots x$ *živi v Afriki.* $R(x) \ldots x$ *ima rep.* $H(x, y) \ldots x$ *je hitrejši od* y. $P(x) \ldots x$ zna plavati

Tako $R(\text{lev})$ formalizira izjavo "*Lev ima rep.*"
Izjavo "*x je hitrejši od slona.*" pa formaliziramo s formulo $H(x, \text{slon})$.

Formaliziraj naslednje izjave. Pri tem smiselno definiraj potrebne manjkajoče predikate.

a) (5 točk) *Nekatere živali nimajo repa.*

b) (5 točk) *Vsaka afriška žival zna plavati.*

c) (5 točk) *Nekatere afriške živali nimajo repa in ne znajo plavati.*

d) (5 točk) *Slon je najhitrejša žival.*

e) (5 točk) *Najhitrejša žival živi v Afriki in zna plavati.*

a) $\exists x : \neg R(x)$

b) $\forall x : (A(x) \Rightarrow P(x))$

c) $\exists x \, (A(x) \wedge \neg R(x) \wedge \neg P(x))$

d) $\forall x \;\; H(\text{slon}, x)$

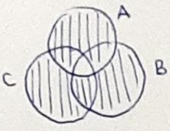
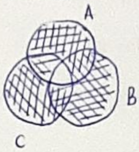
e) $\exists x \, \forall y \;\; (H(x, y) \Rightarrow A(x) \wedge P(x))$

4. naloga (25 točk)

Naj bodo A, B in C poljubne množice. Opazujemo množice

$$\begin{aligned} U &= A + B + C, \\ V &= (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C), \\ W &= (A + C) \cup (B + A) \cup (C + B). \end{aligned}$$

a) (15 točk) Utemelji, da sta množici V in W enaki.

V  W = 

$V = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)^c = (A \cup B \cup C) \cap (A^c \cup B^c \cup C^c) =$

$= ((A \cup B \cup C) \cap A^c) \cup ((A \cup B \cup C) \cap B^c) \cup ((A \cup B \cup C) \cap C^c) =$

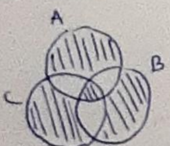
$= \underbrace{(A \cap A^c)}_{=\emptyset} \cup (B \cap A^c) \cup (C \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \cup \underbrace{(B \cap B^c)}_{=\emptyset} \cup (C \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) \cup \underbrace{(C \cap C^c)}_{=\emptyset}$

$= ((A \setminus C) \cup (C \setminus A)) \cup ((B \setminus A) \cup (A \setminus B)) \cup ((C \setminus B) \cup (B \setminus C))$

$= (A + C) \cup (B + A) \cup (C + B) = W$

MNOŽICI STA ENAKI

b) (10 točk) Pokaži, da v splošnem *ne velja* vsebovanost $U \subseteq V$. Ravno tako pokaži, da v splošnem *ne velja* vsebovanost $W \subseteq U$.

U 

DOKAZ: $U \subseteq V$ v splošnem ne velja

PROTIPRIMER: $A = B = C = \{x\}$

$U = (\{x\} + \{x\}) + \{x\} = \emptyset + \{x\} = \{x\}$

$V = (\{x\} \cup \{x\} \cup \{x\}) \setminus (\{x\} \cap \{x\} \cap \{x\}) = \{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$

$U \not\subseteq V$

DOKAZ: $W \subseteq U$ v splošnem ne velja

PROTIPRIMER: $A = C = \{x\}$, $B = \emptyset$

$W = (\{x\} + \{x\}) \cup (\{x\} + \emptyset) \cup (\{x\} + \emptyset) = \emptyset \cup \{x\} \cup \{x\} = \{x\}$

$U = (\{x\} + \emptyset) + \{x\} = \{x\} + \{x\} = \emptyset$

$W \not\subseteq U$