Diskretne strukture UNI, vaje, 24. 12. 2024

2. Za $n > 3$ definiramo permutacije $\pi_n \in S_n$ kot produkt ciklov

$$\pi_n = (1 \quad 2 \quad n)(1 \quad 3 \quad n)\cdots(1 \quad n-1 \quad n).$$

$1 \mapsto 2$
$2 \mapsto n$
$n \mapsto 1$

(a) Zapiši permutacije π_4, π_5 in π_6.

(b) Izračunaj $\pi_n(1)$, $\pi_n(n)$, $\pi_n^{-1}(1)$ in $\pi_n^{-1}(n)$.

(c) Določi ciklično strukturo in parnost permutacije π_n.

D.N.

$\pi_n : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekcija

(a) $\pi_4 = (1\ 2\ 4)(1\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$,

$\pi_5 = (1\ 2\ 5)(1\ 3\ 5)(1\ 4\ 5) = (1\ 2\ 4\ 5\ 3)$,

$\pi_6 = (1\ 2\ 6)(1\ 3\ 6)(1\ 4\ 6)(1\ 5\ 6) = (1\ 2\ 4)(3\ 5\ 6)$.

(b) $\pi_n(1) = 2$, $\pi_n(n) = 3$

$\pi_n^{-1} = (1\ \ n-1\ \ n)^{-1}(1\ \ n-2\ \ n)^{-1} \cdots (1\ \ 2\ \ n)^{-1} =$ $\qquad (\alpha * \beta)^{-1} = \beta^{-1} * \alpha^{-1}$

$= (n\ \ n-1\ \ 1)\ (n\ \ n-2\ \ 1) \cdots (n\ \ 2\ \ 1)$

$\pi_n^{-1}(1) = n-2$, $\pi_n^{-1}(n) = n-1$.

(c) Permutacij pravimo soda/liha glede na št. $\overbrace{\text{transpozicij}}^{\text{cikli dolž. } 2}$, ki jih dobimo v zapisu te permutacije.

Npr.: $\pi_5 = (1\ 2\ 4\ 5\ 3) = (1\ 2)(1\ 4)(1\ 5)(1\ 3)$, π_5 je soda.

$\pi_n = (1\ 2)(1\ n)(1\ 3)(1\ n) \ldots (1\ \ n-1)(1\ \ n)$, transpozicij je ravno $2(n-2)$, tj. π_n je soda za vse n.

3. Dane so permutacije

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ in}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zapiši permutacije η, θ in ξ kot produkte disjunktnih ciklov.

(b) Kateri dve od permutacij η, θ in ξ sta konjugirani? (Permutacji α in β sta *konjugirani*, če obstaja permutacija π, da je $\alpha = \pi * \beta * \pi^{-1}$.)

(c) Za vsaki dve konjugirani permutaciji poišči ustrezno permutacijo π.

(a)

$\eta = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 8)(7\ 9)$, ciklična struktura $[4,3,2]$

$\vartheta = (1\ 5)(2\ 6\ 4)(3\ 7\ 8\ 9)$, ——— 〃 ——— $[4,3,2]$

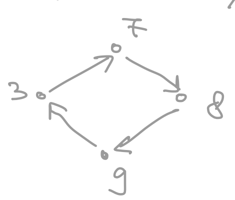
$\xi = (1\ 3\ 5\ 7\ 9)(4\ 6\ 8\ 2)$, ——— 〃 ——— $[5,4]$

(b) α in β sta konjugirani, če imata enako ciklično strukturo, torej sta η in ϑ konjugirani.

(c) $\eta = \pi * \vartheta * \pi^{-1}$ za nek π

$$\left.\begin{aligned} \eta &= (2\ 4\ 6\ 8)(1\ 3\ 5)(7\ 9) \\ \vartheta &= (3\ 7\ 8\ 9)(2\ 6\ 4)(1\ 5) \end{aligned}\right\} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 6 & 7 & 4 & 8 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$(8\ 9\ 3\ 7)$



4. Poišči vsaj dve permutaciji $\pi \in S_6$, za kateri je

$$\pi * \pi * \pi = \pi^3 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6).$$

Ciklična struktura π^3 je $[2,2,2]$.

Recimo, da je π zapisana kot prod. disjunktnih ciklov.

S predavanj: Če cikel dolžine d potenciramo na potenco k, potem ta razpade na $\gcd(d,k)$ ciklov dolžin $\frac{d}{\gcd(d,k)}$.

Kaj so vse ciklične strukture permutacij iz S_6?

$[6]$ ✓, $[5,1]$ ✗, $[4,2]$ ✗, $[4,1,1]$ ✗, $[3,3]$ ✗, $[3,2,1]$ ✗, $[3,1,1,1]$ ✗,

$[2,2,2]$ ✓, $[2,2,1,1]$ ✗, $[2,1,1,1,1]$ ✗, $[1,1,1,1,1,1]$ ✗

Dopustni ciklični strukturi za π, ki reši en. $\pi^3 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$ sta $[6]$ in $[2,2,2]$.

$(\underline{1}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{2}\ \underline{6}\ \underline{3})$

- rešitev s c.s. $[6]$: $\pi = (\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{5}\ \underline{2}\ \underline{4}\ \underline{6}) = (\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{5}\ \underline{2}\ \underline{4}\ \underline{6})$

  $\pi = (a\ b\ c\ d\ e\ f)$ ... $\pi^3 = (a\ d)(b\ e)(c\ f)$

- rešitev s c.s. $[2,2,2]$: $\pi = (\underline{1}\ \underline{2})(\underline{3}\ \underline{4})(\underline{5}\ \underline{6})$

7. Naj bodo $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 & 2 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$, $\beta = \underbrace{(1\ 2)(1\ 6)(1\ 7)(1\ 3)}_{(1\ 2\ 6\ 7\ 3)}\underbrace{(4\ 5)(4\ 10)(4\ 8)}_{(4\ 5\ 10\ 8)}$ in $\gamma = (1\ 4\ 9\ 3\ 6\ 7\ 2\ 8)$ permutacije iz S_{10}.

(5) (10)

(a) Določi ciklične strukture in parnosti permutacij α, β ter γ.

(b) Poišči vse dopustne ciklične strukture za permutacijo π, ki reši enačbo

$$\alpha * \beta * \pi^4 * \beta^{-1} = \gamma$$

(c) Poišči vsaj eno rešitev zgornje enačbe, ki ima najvišji možni red.

saj $(4-1)+(3-1)+(3-1)$ je liho

	cik. str.	parnost
(a) $\alpha = (1\ 4\ 5)(2\ 3\ 6\ 7)(8\ 9\ 10)$	$[4,3,3]$	liha
$\beta = (1\ 2\ 6\ 7\ 3)(4\ 5\ 10\ 8)(9)$	$[5,4,1]$	liha
γ	$[8,1,1]$	liha

(b) $\alpha^{-1} * / \ \alpha * \beta * \pi^4 * \beta^{-1} = \gamma$

$$\underbrace{\alpha^{-1} * \alpha}_{id} * \beta * \pi^4 * \beta^{-1} = \alpha^{-1} * \gamma \quad \dots \quad \beta * \pi^4 * \beta^{-1} = \alpha^{-1} * \gamma$$

Ciklični str. π^4 in $\alpha^{-1} * \gamma$ sta enaki (saj je π^4 konjugirana $\alpha^{-1} * \gamma$).

$$\alpha^{-1} * \gamma = (10\ 9\ 8)(7\ 6\ 3\ 2)(5\ 4\ 1) * (1\ 4\ 9\ 3\ 6\ 7\ 2\ 8) =$$

$$= (1\ 5\ 9)(2)(3\ 8\ 10)(4)(6)(7), \text{ c.s. } [3,3,1,1,1,1],$$

to je tudi c.s. za π^4.

- pri potenciranju na 4 cikel dolžine 6 razpade na 3, 3,
- pri potenciranju na 4 cikel dolžine 4 razpade na 1, 1, 1, 1,
- pri potenciranju na 4 cikel dolžine 2 razpade na 1, 1,
- pri potenciranju na 4 cikel dolžine 1 razpade na 1,
- pri potenciranju na 4 cikel dolžine 3 razpade na 3.

Dopustne c.s. za π: (pripadajoč red)

$[6,4]^{12}$, $[6,2,2]^{6}$, $[6,2,1,1]^{6}$, $[6,1,1,1,1]^{6}$, $[3,3,4]^{12}$, $[3,3,2,2]^{6}$, $[3,3,2,1,1]^{6}$, $[3,3,1,1,1,1]^{3}$.

(c) Red perm. π je najmanjše št. $r > 0$, da je $\pi^r = id$.

$\pi = (\cdot\ \cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot\ \cdot)(\cdot\ \ldots)$, $r = \text{lcm}(\text{"dolžin ciklov"})$

Poiščimo rešitev s c. s. [6, 4]:

$$\beta^{-1} * / \beta * \pi^4 * \beta^{-1} = \alpha^{-1} * \gamma \ / * \beta$$

$$\pi^4 = \beta^{-1} * \alpha^{-1} * \gamma * \beta =$$

$$= \beta^{-1} * (1\ 5\ 9)(2)(3\ 8\ 10)(4)(6)(7) * \beta =$$

$$= (1\ 4\ 8)(2\ 10\ 9)(3)(5)(6)(7)$$

$$\beta = (1\ 2\ 6\ 7\ 3)(4\ 5\ 10\ 8)(9)$$

$\pi = (\underline{1}\ \underline{2}\ \underline{8}\ \underline{9}\ \underline{4}\ \underline{10})(\underline{3}\ \underline{5}\ \underline{6}\ \underline{7})$ ← ena rešitev z najvišjim možnim redom.