Prve vaje APS2

1. Dokažite, da je $2n^2 + 7n + 3 = \Theta(n^2)$.

Poiskati moramo pozitivne konstante n_0, c_1 in c_2, tako da za vsak $n \geqslant n_0$ velja $c_1 n^2 \leqslant 2n^2 + 7n + 3 \leqslant c_2 n^2$. Vzemimo $c_1 = 1$, $c_2 = 3$ in $n_0 = 10$:

- Očitno je $2n^2 + 7n + 3 \geqslant n^2$ za vsak $n \geqslant 10$.
- Velja tudi $2n^2 + 7n + 3 \leqslant 3n^2$ za vsak $n \geqslant 10$, saj velja $n^2 - 7n - 3 \geqslant 0$ za vsak $n \geqslant (7 + \sqrt{61}) / 2$.

2. Dokažite, da za vsak $a, b > 1$ velja $O(\log_a n) = O(\log_b n)$.

Pokažimo, da iz $f(n) \in O(\log_a n)$ sledi $f(n) \in O(\log_b n)$ in obratno.

Če je $f(n) \in O(\log_a n)$, obstajata n_0 in c, tako da za vsak $n \geqslant n_0$ velja $f(n) \leqslant c \log_a n$. Ker je $\log_a n = \log_a b \log_b n$, je $f(n) \leqslant c \log_a b \log_b n = (c \log_a b) \log_b n$ za vsak $n \geqslant n_0$. Če vzamemo $d = c \log_a b$, vidimo, da je $f(n) \in O(\log_b n)$. Implikacijo $f(n) \in O(\log_b n) \implies f(n) \in O(\log_a n)$ dokažemo na podoben način.

3. Dokažite, da je $3^n = \omega(2^n)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

4. Dokažite, da je $n = \omega(\lg^2 n)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg^2 n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n \ln^2 2} \underset{\text{L-Hôpital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2 \ln n}{n \ln^2 2} \underset{\text{L-Hôpital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n \ln^2 2} = 0.$$

5. Dokažite, da je $\lg n! = \Theta(n \log n)$.

Uporabimo Stirlingovo aproksimacijo.

$$\lg n! \approx \lg\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right) = n(\lg n - \lg e) + \frac{1}{2}(\lg 2\pi + \lg n) = \Theta(n \lg n).$$

6. Dokažite, da funkcija $n^{\lg n}$ asimpotično narašča strogo hitreje kot funkcija n^k (za poljuben $k > 0$), a strogo počasneje kot k^n (za poljuben $k > 1$).

Pri obeh dokazih uporabljamo sledečo trditev: če je $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$ in $\lim_{n\to\infty} f(n) / g(n) = 0$, potem je $\lim_{n\to\infty}(f(n) - g(n)) = -\infty$. Res je: $\lim_{n\to\infty}(f(n) - g(n)) = \lim_{n\to\infty} g(n)(\frac{f(n)}{g(n)} - 1) = \lim_{n\to\infty}(-g(n)) = -\infty$.

Sedaj dokažimo, da je $n^{\lg n} = \omega(n^k)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{\lg n}} = \lim_{n\to\infty} n^{k - \lg n}.$$

Ker je $\lim_{n\to\infty} \lg n = \infty$ in $\lim_{n\to\infty} \frac{k}{\lg n} = 0$, je po zgornji trditvi $\lim_{n\to\infty}(k - \lg n) = -\infty$, zato je $\lim_{n\to\infty} n^{k - \lg n} = 0$.

Dokažimo še, da je $n^{\lg n} = o(k^n)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\lg n}}{k^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\lg n}}{(n^{\log_n k})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\lg n}}{n^{n\log_n k}} = \lim_{n\to\infty} n^{\lg n - n\log_n k}.$$

Ker funkcija $\lg n$ narašča počasneje kot $n \log_n k$ ...

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n\log_n k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln 2} : \frac{n \ln k}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n \ln 2 \ln k} \underset{\text{dvakrat L'Hôpital}}{=} 0$$

... velja $\lim_{n\to\infty}(\lg n - n\log_n k) = -\infty$ in od tod $\lim_{n\to\infty} n^{\lg n - n\log_n k} = 0$.

7 Ocenite časovno zahtevnost sledeče C-jevske funkcije:

```
void f(int n) {
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        for (int j = 1; j <= i; j++) {
            for (int k = 1; k <= j; k++) {
                printf("Dober dan!\n");
            }
        }
    }
}
```

Recimo, da en obhod notranje zanke izvršimo v času c. Poraba časa brez upoštevanja režijskih stroškov zunanje in vmesne zanke je potemtakem sledeča:

$$\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} c = c\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j} 1 = c\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{n}(i^2+i) \\
&= \frac{c}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)\right) \\
&= \frac{c}{12}\left(n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)\right) = \frac{c}{6}n(n+1)(n+2) = \Theta(n^3).
\end{aligned}$$

Prišteti moramo še $\Theta(n)$ (za povečevanje in preverjanje števca zunanje zanke) in $\Theta(n^2)$ (za povečevanje in preverjanje števca vmesne zanke), a rezultat ostane $\Theta(n^3)$.

8 Ocenite časovno zahtevnost sledeče C-jevske funkcije:

```
void f(int n) {
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        int j = i;
        while (j > 0) {
            j /= 2;
            printf("Dober dan!\n");
        }
    }
}
```

V i-tem obhodu zunanje zanke se bo telo notranje zanke izvršilo $(\lfloor \lg i \rfloor + 1)$-krat. Če predpostavimo, da enkratni obhod notranje zanke traja c enot časa, dobimo

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} c(\lfloor \lg i \rfloor + 1) = cn + c\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor.$$

Vsoto $\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor$ lahko navzgor omejimo s $\sum_{i=1}^{n} \lg i = \lg 1 \lg 2 \ldots \lg n = \lg n! = \Theta(n \log n)$, navzdol pa s $\sum_{i=1}^{n} (\lg i - 1) = \lg n! - n = \Theta(n \log n)$. V vsakem primeru imamo torej $T(n) = \Theta(n \log n)$. Režijski stroški zunanje zanke ($\Theta(n)$) tega rezultata ne spremenijo.

9 Ocenite časovno zahtevnost sledeče C-jevske funkcije:

```
void f(int n) {
    if (n > 0) {
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            printf("Dober dan!\n");
        }
        f(n / 2);
    }
}
```

Ker se zanka izvrši v času $\Theta(n)$, lahko zapišemo $T(n) = cn + T(n/2) = cn + cn/2 + T(n/4) = cn + cn/2 + cn/4 + T(n/8) = cn(1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots) \approx 2cn = \Theta(n)$.