1. Naj bo $\mathbf{a} = [1,1,1]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3$. Katere od spodaj naštetih množic so in katere niso vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$? V vsakem od podprostorov poišči vsaj eno neprazno linearno neodvisno podmnožico vektorjev, tj. bazo tega vektorskega podprostora!

   ☑ $U_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0\}$,

   ☒ $U_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 1\}$,

   ☒ $U_3 = \{\mathbf{x} = [1, x_2, x_3]^{\mathsf{T}}\}$,

   ☑ $U_4 = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, 2x_1 - x_2]^{\mathsf{T}}\}$,

   ☑ $U_5 = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathsf{T}} : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,

   ☒ $U_6 = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathsf{T}} : x_1 x_2 x_3 = 0\}$,

   ☑ $U_7 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}\}$.

2. Naj bo $W \leq \mathbb{R}^4$ vektorski podprostor vseh vektorjev $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathsf{T}}$, za katere velja $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

   (a) Preveri, da sta vektorja $\mathbf{u} = [1,1,0,0]^{\mathsf{T}}$ in $\mathbf{v} = [1,1,3,3]^{\mathsf{T}}$ vsebovana v W.

   (b) Dopolni množico $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ do baze za W (če je to potrebno).

   Rešitev: (b) Dodamo npr. $\mathbf{w} = [1,0,0,1]^{\mathsf{T}}$.

3. Naj bo $W \leq \mathbb{R}^4$ linearna ogrinjača vektorjev iz množice

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \right\},$$

   tj. $W = \mathcal{L}(L)$. Naj bo $\mathbf{v} = [-2, 2, -6, 2]^{\mathsf{T}}$.

   (a) Zapiši vektor $\mathbf{v}$ kot linearno kombinacijo vektorjev iz L. Lahko to storimo na več načinov?

   (b) Opiši vse linearne kombinacije vektorjev iz L, ki so enake $\mathbf{0}$.

   (c) Utemelji: Če iz L odstranimo en (katerikoli) vektor, dobimo linearno neodvisno množico vektorjev.

   (d) Poišči bazo za W.

   Rešitev: Naj bodo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ po vrsti vektorji iz L. (a) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Da, lahko.
   (b) $\alpha\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2 + \alpha\mathbf{v}_3 + \alpha\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. (c) To postane jasno po Gaussovi eliminaciji.
   (d) $B_W = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

4. Dani so vektorji

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

(a) Iz tega nabora vektorjev izberi največji možen nabor linearno neodvisnih vektorjev.

(b) Ali izbran nabor vektorjev predstavlja bazo prostora $\mathbb{R}^4$?

(c) Kako bi ostale vektorje izrazil kot linearne kombinacije prej izbranih?

Rešitev: (a) Recimo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}$. (b) Da. (c) $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{w} = 7\mathbf{v} - 2\mathbf{x} - \mathbf{y}$.