1. Naj bo $A$ matrika
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči ortonormirano bazo $\mathbb{R}^4$ sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike $A$.

   (b) Zapiši spektralni razcep matrike $A$ – izrazi $A$ kot linearno kombinacijo matrik pravokotnih projekcij.

Rešitev: (a) $B_{\mathbb{R}^4} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$
(b) $A = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^\mathsf{T} + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^\mathsf{T} + 5\mathbf{q}_3\mathbf{q}_3^\mathsf{T} + 9\mathbf{q}_4\mathbf{q}_4^\mathsf{T}.$

2. Poišči (ekonomični) singularni razcep matrike
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$
tj. poišči ortogonalni matriki $U$ in $V$ ter (kvadratno) diagonalno matriko $S$, da bo $A = USV^\mathsf{T}$. Lahko slediš tem korakom:

   (a) Diagonaliziraj $AA^\mathsf{T}$ v ortonormirani bazi $\mathbb{R}^2$. Prepričaj se, da je prehodna matrika ravno $U$, diagonalna matrika pa točno $S^2$.

   (b) S pomočjo $S$ in $U$ iz prejšnje točke ter zapisa $A = USV^\mathsf{T}$ določi še $V$.

Rešitev: (a) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$, $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $AA^\mathsf{T} = UDU^\mathsf{T}$. (b) $U$ kot prej, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $V = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Naj bo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ predoločen sistem linearnih enačb, tj. matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je pokončna; $m \geq n$. Denimo, da poznamo singularni razcep $A$; $A = USV^\mathsf{T}$. Naj bo $S^+$ matrika, ki jo dobimo iz $S$, tako da vse neničelne singularne vrednosti $\sigma_i > 0$ zamenjamo z $\frac{1}{\sigma_i}$ in transponiramo. Označimo $A^+ = VS^+U^\mathsf{T}$. Preveri naslednje:

   (a) Če je $A$ kvadratna in polnega ranga, potem je $A^+ = A^{-1}$.

   (b) Vektor $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ je rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ v smislu linearne metode najmanjših kvadratov (tj. $A^+\mathbf{b}$ je ena od rešitev sistema $A^\mathsf{T}A\mathbf{x} = A^\mathsf{T}\mathbf{b}$).