

SEZNAM IZPITNIH TEMATIK IZ NUMERIČNIH METOD (2024/2025)

1. UVOD V NUMERIČNO RAČUNANJE

- (1) Kaj je strojni epsilon? Kaj je osnovna zaokrožitvena napaka?
- (2) Katere napake pri numeričnem računanju poznamo?
- (3) Razložite razliko med občutljivostjo problema in numerično stabilnostjo algoritma. Kaj moramo zagotoviti, da bo izračunani rezultat dovolj natančen?
- (4) Kaj je relativno direktno stabilna metoda in kaj relativno obratno stabilna metoda? Navedite primer metode, ki je relativno direktno in obratno stabilna in skicirajte dokaz. Navedite primer metode, ki je relativno obratno, ne pa tudi relativno direktno stabilna.

2. REŠEVANJE LINEARNIH SISTEMOV IN NORME

- (1) Kaj je LU razcep matrike A (brez pivotiranja) in kako ga izračunamo? Pojasnite pojem Gaussovih elementarnih eliminacij v LU razcepu. Koliko računskih operacij je potrebnih za izračun LU razcepa? Napišite primer matrike, pri kateri se ne da izračunati LU razcepa brez pivotiranja.
- (2) Kaj je zgornje trikoten sistem linearnih enačb? Kaj je prema in kaj obratna substitucija za trikoten sistem? Koliko računskih operacij zahtevata? Kako s pomočjo LU razcepa matrike A izračunamo rešitev linearnega sistema enačb $Ax = b$? Koliko operacij zahteva?
- (3) Kaj je LU razcep matrike A z delnim pivotiranjem? Zakaj ga uvedemo? Opišite postopek za njegov izračun. Kako s pomočjo tega razcepa izračunamo rešitev linearnega Sistema enačb $Ax = b$? Koliko operacij zahteva reševanje sistema $Ax = b$ prek LU razcepa z delnim pivotiranjem?
- (4) Dokažite, da LU razcep z delnim pivotiranjem vedno obstaja za vsako nesingularno matriko.
- (5) Kaj je razcep Choleskega matrike in za katere matrike se razcep izvede? Kakšna je računska zahtevnost in kakšna je stabilnost v primerjavi z LU razcepom.
- (6) Kaj je vektorska norma? Navedite nekaj primerov vektorskih norm? Kaj je matrična norma? Na kakšen način vektorska norma porodi pripadajočo matrično normo? Navedite nekaj primerov matričnih norm.
- (7) Kaj je pogojenostno število matrike? Koliko je lahko največja in manjša vrednost števila? Kako je pogojenostno število povezano s stabilnostjo reševanja sistema linearnih enačb? Zapišite formulo, ki ju povezuje.

(8) Katere iterativne metode za reševanje linearnih sistemov poznate? Kateri pogoj mora biti izpolnjen, da metoda konvergira k točni rešitvi za vsak začetni približek? Eno od iterativnih metod podrobno opišite.

3. PREDOLOČENI SISTEMI

(1) Kaj je predoločen sistem enačb? Napišite primer. Kaj je rešitev predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov? Kaj velja za residual rešitve? Kako izračunamo rešitev predoločenega sistema preko normalnega sistema?

(2) Kaj je QR razcep matrike A in kako z njegovo pomočjo pridemo do rešitve predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov? Kdaj in zakaj je smiselno izbrati QR razcep za reševanje predoločenega sistema namesto normalnega sistema?

(3) Kaj je (modificirana) Gram–Schmidtova ortogonalizacija in kako s pomočjo nje izračunamo QR razcep matrike?

(4) Kaj so Householderjeva zrcaljenja in kako s pomočjo njih izračunamo QR razcep matrike?

4. ISKANJE LASTNIH VREDNOSTI MATRIK

(1) Kaj je dominantna lastna vrednost in lastni vektor? Kako s pomočjo potenčne metode poiščemo dominantni lastni par? Zapišite dokaz za konvergenco potenčne metode.

(2) Kaj je inverzna iteracija in zakaj se uporablja? Kako je povezana s potenčno metodo? Zakaj metoda konvergira (lahko se skličete na potenčno metodo)?

(3) Kaj je QR-iteracija z enojnim premikom? Kaj je cilj premika? Kako učinkovito numerično izračunamo vse lastne vrednosti matrike? Koliko računskih operacij potrebujemo?

5. REŠEVANJE NELINEARNIH ENAČB

(1) Opišite, kako deluje bisekcija. Katere lastnosti funkcije f morajo biti izpolnjene? Koliko korakov bisekcije je potrebnih, da na intervalu $[a, b]$ izračunamo ničlo funkcije f na natančnost 10^{-10} ?

(2) Kaj pomeni red konvergence? Kako se red konvergence pozna pri dejanski uporabi metode?

(3) Izpeljite in opišite tangentno metodo ter določite red konvergence. Izpeljite sekantno metodo. Kaj je prednost metode glede na tangentno metodo?

(4) Naj bo g iteracijska funkcija. Kaj so negibne točke za g ? Kdaj so privlačne, kdaj odbojne? Kako s postopkom navadne iteracije izračunamo ničle nelinearne funkcije f ? Kdaj je hitrost konvergence linearna, kvadratična in kdaj kubična?

(5) Opišite eno izmed metod za reševanje sistema nelinearnih enačb.

6. POLINOMSKA INTERPOLACIJA IN APROKSIMACIJA

(1) Razložite interpolacijski problem. Zapišite sistem enačb, ki določa interpolacijski polinom, zapisan v potenčni bazi. Ali rešitev vedno obstaja? Ali je reševanje tega sistema vedno numerično stabilno?

(2) Opišite Lagrangeovo obliko interpolacijskega polinoma, njene prednosti in pomanjkljivosti. Pojasnite lastnosti baznih funkcij.

(3) Opišite Newtonovo obliko interpolacijskega polinoma. Kaj so deljene difference in kako jih računamo? Kakšne so prednosti Newtonove oblike interpolacijskega polinoma v primerjavi z Lagrangeovo?

(4) Ali višanje stopnje interpolacijskega polinoma vedno izboljša prileganje dani funkciji? Utemeljite s primerom. Kako se lahko izognemo težavi? Kakšna je napaka interpolacije s polinomom stopnje n ?

7. NUMERIČNA INTEGRACIJA

(1) Opišite osnovno trapezno in osnovno Simpsonovo pravilo. Kako izpeljemo ti dve pravili in kakšni sta napaki pravila? Opišite sestavljeno trapezno in sestavljeno Simpsonovo pravilo.

(2) Pojasnite pojma Richardsonove ekstrapolacije in ocene metode? Razložite ju na primeru sestavljenega trapeznega pravila.

(3) Kaj so vozli in kaj uteži v integracijskem pravilu? V čem so Gaussova pravila boljša od Newton-Cotesovih? Kako jih izpeljemo?

(4) Kako se numerično računa dvojni integral na pravokotni domeni? Kako izgledata sestavljeno trapezno in sestavljeno Simpsonovo pravilo na pravokotni domeni?

8. REŠEVANJE DIFERENCIALNIH ENAČB

(1) Izpeljite eksplicitno in implicitno Eulerjevo metodo za reševanje začetnega problema. Kakšna je razlika med metodama?

(2) Opišite idejo Runge-Kutta metod za reševanje diferencialnih enačb. Kateri pogoji morajo na koeficiente sheme morajo biti izpolnjeni. Kdaj je metoda eksplicitna?

- (3) Razložite metodo vgnezdenih parov Runge-Kutta metode. Zakaj je metoda uporabna?
- (4) Razložite, kako numerično rešujemo diferencialne enačbe višjega reda (reda $n > 1$).
- (5) Predstavite idejo večkoračnih metod. Razložite idejo izpeljave za eno izmed razredov te metode.