1. Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči ortonormirano bazo $\mathbb{R}^4$ sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A.

(b) Zapiši spektralni razcep matrike A – izrazi A kot linearno kombinacijo matrik pravokotnih projekcij.

(a) Poiščimo najprej lastne vrednosti:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 3 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\begin{array}{cc|cc} 7-\lambda & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 7-\lambda & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{array}\right| = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2\left((7-\lambda)^2 - 2^2\right) = (1-\lambda)^2(5-\lambda)(9-\lambda) = 0$$

lastne vrednosti $A \longrightarrow$ $\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 5,\ \lambda_4 = 9$

Še lastni vektorji:

- $\lambda_{1,2} = 1$:

$$A - I \xrightarrow{\text{G.e.}} \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_3 = 5$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{G.e.}} \cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_4 = 9$: Uporabimo dejstvo, da je A simetrična in $\dim(A-9I) = 1$; $\vec{v}_4$ je pravokoten na $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, torej $\vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lastni vektorji so že pravokotni (tisti za različne lastne vrednosti avtomatično, saj je A simetrična), za ortonormirano bazo $\mathbb{R}^4$ jih le še normiramo:

$$B_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}}_{\vec{q}_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}}_{\vec{q}_2}, \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}}_{\vec{q}_3}, \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}_{\vec{q}_4} \right\}.$$

(b) $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{q}_i \vec{q}_i^{\,T} = \vec{q}_1\vec{q}_1^{\,T} + \vec{q}_2\vec{q}_2^{\,T} + 5\vec{q}_3\vec{q}_3^{\,T} + 9\vec{q}_4\vec{q}_4^{\,T}$.

2. Poišči (ekonomični) singularni razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix},$$

tj. poišči ortogonalni matriki U in V ter (kvadratno) diagonalno matriko S, da bo $A = USV^{\mathsf{T}}$. Lahko slediš tem korakom:

(a) Diagonaliziraj AA^{T} v ortonormirani bazi $\mathbb{R}^2$. Prepričaj se, da je prehodna matrika ravno U, diagonalna matrika pa točno S^2.

(b) S pomočjo S in U iz prejšnje točke ter zapisa $A = USV^{\mathsf{T}}$ določi še V.

(a) $AA^T = \begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -4\\ -4 & 5\end{bmatrix}$.

Poleg tega, da je AA^T simetrična, opazimo še, da je vsota elementov v vsaki vrstici enaka 1. Vektor $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ je torej lastni vektor AA^T z lastno vrednostjo:

$$AA^T\vec{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1\cdot\vec{x}_1 \quad \ldots \quad \lambda_1 = 1.$$

Ker lastni vektorji simetrične matrike tvorijo ortonormirano bazo (in nam v $\mathbb{R}^2$ manjka le še en bazni vektor), lahko drugi lastni vektor kar uganemo: $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

Pripadajoča lastna vrednost je:

$$AA^T \vec{x}_2 = \begin{bmatrix}9\\-9\end{bmatrix} = 9\,\vec{x}_2 \quad \dots \quad \lambda_2 = 9.$$

$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ sta pravokotna, nista pa še normirana:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \frac{\vec{x}_2}{\|\vec{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

Zakaj nam to koristi pri iskanju SVD?

Recimo, da že imamo $A = USV^T$. Tedaj:

$$AA^T = USV^T(USV^T) = USV^TVS^TU^T = \underbrace{US^2U^T}$$

to je diagonalizacija AA^T

v ortonormirani bazi

Za "naš" A torej velja:

$$U = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}, \quad S^2 = \begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&9\end{bmatrix} \dots \quad S = \begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1}&\\&\sqrt{\lambda_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}.$$

(b) Določimo še V:

v našem primeru S^{-1} obstaja

$$U^T\cdot / \; A = USV^T \quad \dots \quad U^TA = SV^T \quad \dots \quad S^{-1}U^TA = V^T$$

$$V^T = \begin{bmatrix}1&\\&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2&1\\1&2&0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1/3&-4/3&1/3\end{bmatrix} \quad \dots \quad V = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}3&-1\\0&-4\\3&1\end{bmatrix}.$$

3. Naj bo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ predoločen sistem linearnih enačb, tj. matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je pokončna; $m \geq n$. Denimo, da poznamo singularni razcep A; $A = USV^{\mathsf{T}}$. Naj bo S^+ matrika, ki jo dobimo iz S, tako da vse neničelne singularne vrednosti $\sigma_i > 0$ zamenjamo z $\frac{1}{\sigma_i}$ in transponiramo. Označimo $A^+ = VS^+U^{\mathsf{T}}$. Preveri naslednje:

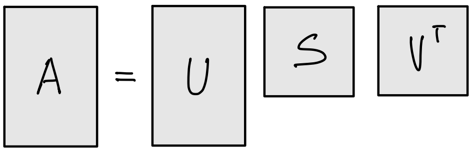
   (a) Če je A kvadratna in polnega ranga, potem je $A^+ = A^{-1}$.

   (b) Vektor $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ je rešitev sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ v smislu linearne metode najmanjših kvadratov (tj. $A^+\mathbf{b}$ je ena od rešitev sistema $A^{\mathsf{T}}A\mathbf{x} = A^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$).

Pripravimo oznake:

$$A = USV^T, \text{ kjer } S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_k & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad S^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{\sigma_k} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

zadnja neničelna singularna vrednost



(a) Ker je $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(S) = n$, so vse singularne vrednosti strogo pozitivne; $\sigma_i > 0$. To pomeni $S^+ = S^{-1}$ in zato

$$A^+A = VS^+U^TUSV^T = VS^{-1}SV^T = VV^T = I, \text{ tj. } A^+ = A^{-1}.$$

V je kvadratna in ortogonalna

(b) Če $\vec{x} = A^+\vec{b}$, potem

$$A^TA\vec{x} = A^TAA^+\vec{b} = \underbrace{VS\cancel{U^T}}_{A^T}\,\underbrace{\cancel{U}S\cancel{V^T}}_{A}\,\underbrace{\cancel{V}S^+U^T}_{A^+}\vec{b} = VSU^T\vec{b} = A^T\vec{b},$$

$$SS^+ = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

k-ti stolpec

torej je $\vec{x}$ res rešitev normalnega sistema.