Vpisna številka:_______________ Ime in priimek:___________________________________

2. kolokvij iz Linearne algebre - teorija
28. 5. 2025

Pri nalogah, ki imajo možnost **P**(ravilno)/**N**(epravilno) napišite P oziroma N in kratko utemeljitev. Pri ostalih nalogah odgovorite na zastavljeno vprašanje.

Čas pisanja je 20 minut.

(1) Naj bo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava, za katero velja $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ in $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Izračunaj $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}T\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(2) Za linearno neodvisne vektorje $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ in linearno preslikavo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ velja $T(v_1) = v_2$, $T(v_2) = v_3$ in $T(v_3) = v_1 + v_2 + v_3$. Zapiši matriko, ki pripada preslikavi T v bazi $\{v_1, v_2, v_3\}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) **(P/N)** Če so $v_1, \ldots, v_5 \in \mathbb{R}^5$ linearno neodvisni vektorji in za linearno preslikavo $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ velja $T(v_1) = T(v_3) = T(v_5)$ in $T(v_2) = T(v_4)$, potem je dimenzija jedra preslikave T enaka vsaj 3.

P $\dim \ker(T) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim \operatorname{im}(T)$

$\dim \operatorname{im}(T) \le 2 \Rightarrow \dim \ker(T) \ge 5 - 2 = 3$

(4) **(P/N)** Če za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $A^2 = 0$, potem je 0 edina lastna vrednost matrike A.

P $Ax = \lambda x,\ x \neq 0$

$\Rightarrow 0 = A^2 x = A(\lambda x) = \lambda^2 x \Rightarrow \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

(5) **(P/N)** Če sta edini lastni vrednosti matrike $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ enaki 0 in 1, ranga matrik A in $A-I$ pa sta enaka 2, potem se A ne da diagonalizirati.

P

$$a(0)+a(1)=3$$
$$g(0)=3-r(A)=1$$
$$g(1)=3-r(A-I)=1 \quad \Rightarrow \quad g(0)+g(1)=2<3$$

(6) Za matriko $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ velja $\det(A) = 2$ in $\operatorname{sled}(A) = 3$. Zapiši njen karakteristični polinom.

$$p_A(x) = x^2 - 3x + 2$$

(7) Za matriko $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ velja $\operatorname{rang}(A+I) = 2$, $\operatorname{rang}(A-I) = 3$ in $\operatorname{rang}(A) = 3$. Zapiši njen karakteristični polinom.

$$p_A(x) = (x+1)^2(x-1)x$$

(8) **(P/N)** Če je obrnljiva matrika A diagonalizabilna, je tudi A^{-1} diagonalizabilna matrika.

P $\quad A = PDP^{-1}$, ker je A obrnljiva, so vse lastne vrednosti neničelne $\Rightarrow$ $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

(9) **(P/N)** Vse lastne vrednosti matrike $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & \sqrt{11} \\ \sqrt{5} & \sqrt{11} & \sqrt{13} \end{bmatrix}$ so realna števila.

P $\quad$ Ker je matrika simetrična

(10) **(P/N)** Če je $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalna matrika, potem je $\|Qx\| = \|x\|$ za vsak $x \in \mathbb{R}^n$.

P $\quad \|Qx\| = \sqrt{(Qx)^T(Qx)} = \sqrt{x^T(Q^TQ)x} = \sqrt{x^Tx} = \|x\|$