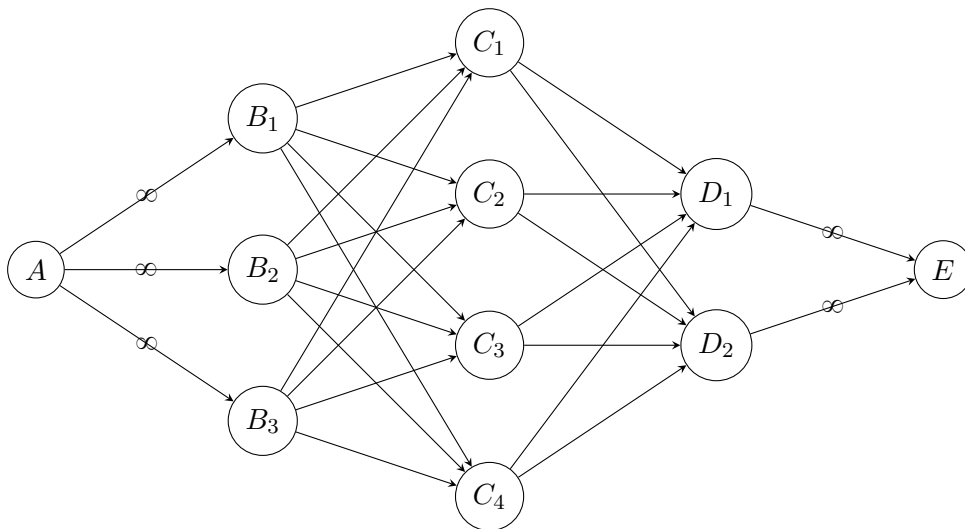


Drugi kolokvij: praktična naloga

Usmerjeni graf $G_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ je sestavljen iz izvora in ponora, vmes pa je k plasti, pri čemer i -ta plast vsebuje n_i vozlišč. Izvor ima povezavo s kapaciteto ∞ do vsakega vozlišča na plasti 1. Vsako vozlišče na plasti k ima povezavo s kapaciteto ∞ do ponora. Vsako vozlišče na plasti i ima povezavo s kapaciteto 1 do vsakega vozlišča na plasti $i + 1$ (to velja za vsak $i \in \{1, \dots, k - 1\}$). Na primer, graf $G_{3,4,2}$ izgleda takole (neoznačene povezave imajo kapaciteto 1):



1. Zapišite enega od topoloških vrstnih redov vozlišč grafa $G_{3,4,2}$. (Seveda kapacitete povezav pri tej nalogi ne igrajo nobene vloge.)
2. Koliko je vseh permutacij množice vozlišč grafa $G_{3,4,2}$, ki predstavljajo veljaven topološki vrstni red?
3. Na grafu $G_{3,4,2}$ uporabite Ford-Fulkersonovo metodo za iskanje maksimalnega pretoka. Zapišite samo nezasičene poti, ki jih algoritem najde v posameznih iteracijah. Vozlišča in povezave lahko izbirate v poljubnem vrstnem redu.
4. Kolikšen je maksimalni pretok grafa $G_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ za splošen $k \geq 2$ in $n_1, \dots, n_k \geq 1$? Odgovor utemeljite!

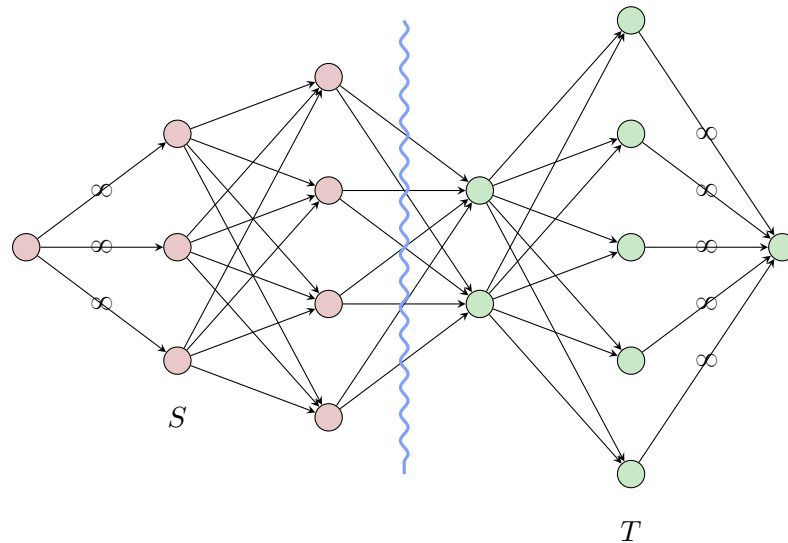
Rešitve:

1. Ena od možnosti je $\langle A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, E \rangle$.
2. Vozlišča na posameznih plasteh lahko med seboj poljubno permutiramo. To pomeni, da imamo $n_1! n_2! \dots n_k!$ veljavnih topoloških vrstnih redov. V našem primeru je to $2! 4! 3! = 288$.
3. Takih poti je 8. Na primer:
 - $A \rightarrow B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E$
 - $A \rightarrow B_1 \rightarrow C_2 \rightarrow D_1 \rightarrow E$
 - $A \rightarrow B_1 \rightarrow C_3 \rightarrow D_1 \rightarrow E$
 - $A \rightarrow B_1 \rightarrow C_4 \rightarrow D_1 \rightarrow E$
 - $A \rightarrow B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow D_2 \rightarrow E$
 - $A \rightarrow B_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2 \rightarrow E$

- $A \rightarrow B_2 \rightarrow C_3 \rightarrow D_2 \rightarrow E$
- $A \rightarrow B_2 \rightarrow C_4 \rightarrow D_2 \rightarrow E$

4. Odgovor je $\min_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}$. Pri utemeljitvi tega rezultata si lahko pomagamo z izrekom o maksimalnem pretoku in minimalnem prerezu.

Kako bi sestavili množici S in T , ki določata minimalni prerez? Hitro vidimo, da morajo biti vsa vozlišča na plasti 1 v množici S , vsa vozlišča na plasti k pa v množici T , saj bi v nasprotnem primeru bila vrednost prereza enaka ∞ . Sedaj trdimo, da moramo mejo med množicama S in T postaviti na mejo med plastema z minimalnim zmnožkom števila vozlišč (recimo med plasti i in $i+1$); vrednost prereza bo potemtakem $n_i n_{i+1}$. Na primer:



Zakaj trditev drži? Če bi katerokoli vozlišče neposredno levo od meje (npr. vozlišče v) iz množice S prestavili v množico T , bi dobili kvečjemu večjo vrednost prereza, saj v vozlišče v vstopa vsaj toliko povezav, kolikor jih iz njega izstopa, sicer zmnožek $n_i n_{i+1}$ ne bi bil najmanjši. Če pa bi v množico T prestavili vozlišče, ki ni neposredno levo od meje, bi razmere še »poslabšali«, saj bi obstoječim povezavam na prerezu dodali še nove. Simetričen argument uporabimo za vozlišča desno od meje.