Numerična matematika (mag.), 1. izpit, računski del, 12. 6. 2025

Možno je doseči 45 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in list formata A4 z zapiski. Čas pisanja je celotnega izpita je 120 minut.

1	2	3	4	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

Naloga 1 [15 točk]

Denimo, da poznamo LU razcep brez pivotiranja matrike $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Matriki A dodamo vrstico in stolpec in tako dobimo novo matriko $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^\top & d \end{bmatrix},$$

kjer velja $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{n-1}$ in $d \in \mathbb{R}$.

(a) Napišite učinkovit algoritem za izračun LU razcepa brez pivotiranja matrike $\tilde{A}$.

(b) Pokažite, da LU razcep za matriko $\tilde{A}$ obstaja, če velja $d \neq \boldsymbol{c}^\top A^{-1} b$.

(c) Preštejte število računskih operacij za izračun LU razcepa brez pivotiranja za matriko $\tilde{A}$.

Rešitev. $\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$ razpišemo po blokih

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} L & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\ell}_1^\top & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} U & \boldsymbol{u}_1 \\ \mathbf{0} & u_2 \end{bmatrix}$$

(a)
[1] $\boldsymbol{b} = L\boldsymbol{u}_1$, dobimo $\boldsymbol{u}_1$ preko premih substitucij
[2] $\boldsymbol{c} = U^\top \boldsymbol{\ell}_1$, dobimo $\boldsymbol{\ell}_1$ preko premih substitucij
[3] $d = \boldsymbol{\ell}_1^\top \boldsymbol{u}_1 + u_2$, izračunamo skalar u_2.

(b) Pogoj $u_2 \neq 0$ se prevede na $d \neq \boldsymbol{\ell}_1^\top \boldsymbol{u}_1$ oz. $d \neq \boldsymbol{c}^\top A^{-1} \boldsymbol{b}$

(c) Rešimo 2 trikotna sistema ([1] in [2]), $n^2 + O(n)$ operacij za vsakega. Za [3] potrebujemo $O(n)$ operacij. Vse skupaj $2n^2 + O(n)$.

Naloga 2 [15 točk]

Za dovolj gladko funkcijo f želimo izpeljati odprto Newton-Cotesovo integracijsko pravilo oblike

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = Af(x_1) + Bf(x_2) + Cf(x_3) + Rf,$$

kjer so $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, ekvidistantni vozli pravila in A, B, C iskane uteži pravila.

(a) Določite pravilo (koeficiente A, B, C), da bo pravilo čim višjega reda.

(b) Z metodo nedoločenih koeficinentov izpeljite napako pravila Rf za dovolj gladko funkcijo f. Kolikšen je red pravila?

(c) Zapišite sestavljeno pravilo na m podintervalih.

Rešitev.
Uteži npr. izračunamo iz Lagrangeeve oblike interpolacijskega polinoma,
$L_{0,2} = (x - x_2)(x - x_3)/((x_1 - x_2)(x_1 - x_3)) \to A = \int_{x_0}^{x_4} L_{0,2} = (8h)/3$
$L_{1,2} = (x - x_1)(x - x_3)/((x_2 - x_1)(x_2 - x_3)) \to B = \int_{x_0}^{x_4} L_{0,2} = -(4h)/3$
$L_{2,2} = (x - x_1)(x - x_2)/((x_3 - x_1)(x_3 - x_2)) \to C = \int_{x_0}^{x_4} L_{0,2} = (8h)/3$

Napaka pravila: Vemo, da je pravilo eksaktno za polinome stopnje ≤ 2. Za stopnjo 3 se izkaže, da je tudi eksaktno. Za stopnjo 4 dobimo:
$f = (x - x_0)^4$, $\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = (1024h^5)/5 = Af(x_1) + Bf(x_1) + Cf(x_1) + Ef^{(4)}(\xi)$
$= (592h^5)/3 + 24E$.
Torej je $E = ((14h^5)/45)$ in velja $Rf = ((14h^5)/45)f^{(4)}(\xi)$.

Naloga 3 [15 točk]

Dan je začetni problem

$$y' = \frac{1+2y}{1+x}, \qquad x \geq 0,\ y(0) = 1,$$

s točno rešitvijo $y(x) = 1 + 3/2\, x(x+2)$.

(a) Preverite, da podani y reši začetni problem.

(b) Izračunajte približek za $y(1)$ tako, da napravite en korak Runge–Kutta metode, ki je odvisna od parametra $\alpha > 0$ in je podana z Butcherjevo shemo

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1-1/\alpha & 1/\alpha \end{array}.$$

(c) Za katere vrednosti α se približek in točna vrednost po absolutni vrednosti razlikujeta za manj kot $1/2$?

Rešitev.
(a) Vstavimo in preverimo enakost
(b) $k_1 = 3$, $k_2 = (3+6a)/(1+a)$, $y_1 = (7+4a)/(1+a)$, $y(1) = 11/2$
(c) $y_1 - y(1) == 1/2 \rightarrow a = 1/2$
$y_1 - y(1) == -1/2 \rightarrow a = 2$
torej $a \in [1/2, 2]$