

Možno je doseči 45 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in list formata A4 z zapiski. Čas pisanja je celotnega izpita je 120 minut.

Ime in priimek

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka

Naloga 1 [15 točk]

Denimo, da poznamo LU razcep brez pivotiranja matrike $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$. Matriki A dodamo vrstico in stolpec in tako dobimo novo matriko $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^\top & d \end{bmatrix},$$

kjer velja $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n-1}$ in $d \in \mathbb{R}$.

- (a) Napišite učinkovit algoritem za izračun LU razcepa brez pivotiranja matrike $\tilde{A}$.
- (b) Pokažite, da LU razcep za matriko $\tilde{A}$ obstaja, če velja $d \neq \mathbf{c}^\top A^{-1} \mathbf{b}$.
- (c) Preštejte število računskih operacij za izračun LU razcepa brez pivotiranja za matriko $\tilde{A}$.

Naloga 2 [15 točk]

Za dovolj gladko funkcijo f želimo izpeljati odprto Newton-Cotesovo integracijsko pravilo oblike

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = Af(x_1) + Bf(x_2) + Cf(x_3) + Rf,$$

kjer so $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, ekvidistantni vozli pravila in A, B, C iskane uteži pravila.

- (a) Določite pravilo (koeficiente A, B, C), da bo pravilo čim višjega reda.
- (b) Z metodo nedoločenih koeficientov izpeljite napako pravila Rf za dovolj gladko funkcijo f . Kolikšen je red pravila?
- (c) Zapišite sestavljeno pravilo na m podintervalih.

Naloga 3 [15 točk]

Dan je začetni problem

$$y' = \frac{1+2y}{1+x}, \quad x \geq 0, y(0) = 1,$$

s točno rešitvijo $y(x) = 1 + 3/2 x(x+2)$.

(a) Preverite, da podani y reši začetni problem.

(b) Izračunajte približek za $y(1)$ tako, da napravite en korak Runge–Kutta metode, ki je odvisna od parametra $\alpha > 0$ in je podana z Butcherjevo shemo

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1 - 1/\alpha & 1/\alpha \end{array}.$$

(c) Za katere vrednosti α se približek in točna vrednost po absolutni vrednosti razlikujeta za manj kot $1/2$?