

Možno je doseči 45 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in list formata A4 z zapiski. Čas pisanja je celotnega izpita je 120 minut.

Ime in priimek

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka

Naloga 1 [15 točk]

V bazenu merimo globino y potapljača v odvisnosti od vodoravne lege x ; izmerimo naslednje podatke

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & -3 & 2 & -6 & 6 & 1 \end{array}.$$

Predvidimo, da se globina potapljača spreminja kot kombinacija nihanja (sinusna funkcija) in vztrajnega gibanja (premica) in jo zato želimo opisati z naslednjo funkcijo

$$y = f(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \beta + \gamma x,$$

pri čemer so α, β, γ prosti parametri. Želimo določiti funkcijo f , ki aproksimira dane podatke po metodi najmanjših kvadratov.

- (a) Napišite predoločen sistem za proste parametre.
- (b) Iz predločenega sistema izpeljite normalni sistem.
- (c) Predoločen sistem rešite preko LU razcepa brez pivotiranja ali razcepa Choleskega. Zapišite iskano funkcijo.

Naloga 2 [15 točk]

Na strežniku merimo količino pretočenih podatkov d v odvisnosti od časa t (v sekundah). Ob času $t = 0$ je seveda količina pretočenih podatkov enaka 0. Ob času $t = 2$ s je količina d enaka 32 MB, ob času $t = 3$ s pa $d = 48$ MB. Na koncu meritve ob izteku 4 s je pretočenih 56 MB podatkov.

- (a) Zapišite Newtonov interpolacijski polinom, ki opisuje količino pretočenih podatkov v odvisnosti od časa.
- (b) Denimo, da dodatno zvemo, da se strežnik nenadno zaustavi ob času $t = 4$ in je zato takrat hitrost (!) pretočenih podatkov enaka 0 MB/s. Upoštevajte nov podatek in določite popravljen interpolacijski polinom.
- (c) S pomočjo interpolacijskega polinoma iz točke (a) in tangentne metode želimo oceniti čas t , ko je bila količina pretočenih podatkov natanko 10 MB. Zapišite postopek, kako bi poiskali želeni čas t (dejanske vrednosti za t ni potrebno izračunati).

Naloga 3 [15 točk]

Rešujete začetni problem

$$y'' = y' + 2y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

- (a) Določite konstanti C_1, C_2 , da bo $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ točna rešitev začetnega problema.
- (b) Prevedite diferencialno enačbo na sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda.
- (c) Sistem iz točke (b) rešite z eksplicitno Eulerjevo metodo na intervalu $[0, 1]$ s korakom $h = 0.5$. Kolikšna je globalna napaka v točki $x = 1$?