Numerična matematika (mag.), 2. izpit, računski del, 27. 6. 2025

Možno je doseči 45 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in list formata A4 z zapiski. Čas pisanja je celotnega izpita je 120 minut.

1	2	3	4	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

Naloga 1 [15 točk]

V bazenu merimo globino y potapljača v odvisnosti od vodoravne lege x; izmerimo naslednje podatke

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-3	2	-6	6	1

Predvidimo, da se globina potapljača spreminja kot kombinacija nihanja (sinusna funkcija) in vztrajnega gibanja (premica) in jo zato želimo opisati z naslednjo funkcijo

$$y = f(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \beta + \gamma x,$$

pri čemer so α, β, γ prosti parametri. Želimo določiti funkcijo f, ki aproksimira dane podatke po metodi najmanjših kvadratov.

(a) Napišite predoločen sistem za proste parametre.

(b) Iz predoločenega sistema izpeljite normalni sistem.

(c) Predoločen sistem rešite preko LU razcepa brez pivotiranja ali razcepa Choleskega. Zapišite iskano funkcijo

Rešitev.
Predoločen sistem se glasi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Iz njega dobimo normalni sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Preko LU razcepa,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

rešimo normalni sistem: iz $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ dobimo $\boldsymbol{y} = [4 \;\; 0 \;\; 8]^\top$, nato iz $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ dobimo $\boldsymbol{x} = [1 \;\; 0 \;\; 1]^\top$. Iskana funkcija je tako

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + x.$$

Podobno lahko rešimo preko razcepa Choleskega za $A = VV^\top$,

$$V = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{8} \end{bmatrix}.$$

Naloga 2 [15 točk]

Na strežniku merimo količino pretočenih podatkov d v odvisnosti od časa t (v sekundah). Ob času $t = 0$ je seveda količina pretočenih podatkov enaka 0. Ob času $t = 2$ s je količina d enaka 32 MB, ob času $t = 3$ s pa $d = 48$ MB. Na koncu meritve ob izteku 4 s je pretočenih 56 MB podatkov.

(a) Zapišite Newtonov interpolacijski polinom, ki opisuje količino pretočenih podatkov v odvisnosti od časa.

(b) Denimo, da dodatno zvemo, da se strežnik nenadno zaustavi ob času $t = 4$ in je zato takrat hitrost pretočenih podatkov enaka nič. Upoštevajte nov podatek in določite popravljen interpolacijski polinom.

(c) S pomočjo interpolacijskega polinoma iz točke (a) in tangentne metode želimo oceniti čas t, ko je bila količino pretočenih podatkov natanko 10 MB. Zapišite postopek, kako bi poiskali želeni čas t (dejanske vrednosti za t ni potrebno izračunati).

Rešitev.
(a) podatki: $x = [0\ \ 2\ \ 3\ \ 4], y = [0\ \ 32\ \ 48\ \ 56]$,
bazne funkcije $1, t, t(t-2), t(t-2)(t-3)$.
iz trikotne sheme dobimo koeficiente $c = [0, 16, 0, -1]$.
iskani polinom: $p(t) = 16t - t(t-2)(t-3)$

(b) bazne funkcije $1, t, t(t-2), t(t-2)(t-3), t(t-2)(t-3)(t-4)$.
Dodamo vrstico v trikotno shemo in dobimo $c = [0, 16, 0, -1, -1/4]$.
iskani polinom: $p(t) = 16t - t(t-2)(t-3) - 1/4t(t-2)(t-3)(t-4)$

(c) $f(t) := p(t) - 10 = 16t - t(t-2)(t-3) - 10$, $f'(t) = (10 - 3t)t + 10$
$t_0 = 0$
$t_{i+i} = t_i - f(t_i)/f'(t_i)$, $i = 1, 2, ...$

Naloga 3 [15 točk]

Rešujete začetni problem

$$y'' = y' + 2y, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$$

(a) Določite konstanti C_1, C_2, da bo $y(x) = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{2x}$ točna rešitev začetnega problema.

(b) Prevedite diferencialno enačbo na sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda.

(c) Sistem iz točke (b) rešite z eksplicitno Eulerjevo metodo na intevalu $[0, 1]$ s korakom $h = 0.5$. Kolikšna je globalna napaka v točki $x = 1$?

Rešitev.
(a) Iz $y(0) = 0$ dobimo pogoj $C_1 + C_2 = 0$, iz $y'(0) = 3$ pa $2C_2 - C_1 = 3$. Torej $C_1 = -1$, $C_2 = 1$.

(b) $y_1 := y$, $y_2 := y_1'$, $Y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. $Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2 + 2y_1, \end{bmatrix}$.

(c) $Y_1 = Y_0 + hF(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 4.5 \end{bmatrix}$

$Y_2 = Y_1 + hF(0.5) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 4.5 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 4.5 \\ 4.5 + 2 \cdot 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.75 \\ 8.25 \end{bmatrix}$

Globalna napaka: $|7.02 - 3.75| = 3.27$