Numerična matematika (mag.), 3. izpit, računski del, 25. 8. 2025

Možno je doseči 45 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in list formata A4 z zapiski. Čas pisanja je celotnega izpita je 120 minut.

1	2	3	4	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

Naloga 1 [15 točk]

Dan je bločni sistem linearnih enačb

$$\begin{bmatrix} U & I \\ A & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix},$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nesingularna matrika z LU razcepom $A = LU$.

(a) Sestavite učinkovit algoritem za reševanje zgornjega sistema linearnih enačb.

(b) Preštejte število računskih operacij ob predpostavki, da LU razcep matrike A že poznate.

(c) Rešite sistem za $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad U = L^\top$, $\quad \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Rešitev.
(a) Razpišemo po blokih

$$U\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_1$$

$$LU\boldsymbol{x} - L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_2$$

Združimo enačbi, da se znebimo $U\boldsymbol{x}$ in dobimo

$$L(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{y}) - L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_2$$

oz.

$$L\boldsymbol{y} = (L\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2)/2.$$

Torej, ko izračunamo $\boldsymbol{y}$ iz zgornjega trikotnega sistema, rešimo še trikotni sistem $U\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}_1$, da dobimo $\boldsymbol{x}$.
(b) Izračun $\boldsymbol{z} := (L\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2)/2$ zahteva $n^2 + O(n)$ operacij.
Za sistem $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ potrebujemo $n^2 + O(n)$ operacij (preme substitucije).
Za sistem $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{y}$ potrebujemo $n^2 + O(n)$ operacij (obratne substitucije).
Skupaj je tako $3n^2 + O(n)$.
(c) $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Naloga 2 [15 točk]

Za integral funkcije f na intervalu $[-1, 1]$ želimo uporabiti integracijsko pravilo oblike

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),$$

kjer sta x_1 in x_2 ničli polinoma $p_2(x) := 3/2\, x^2 - 1/2$.

(a) Določite α_1 in α_2 tako, da bo formula eksaktna za polinome čim višje stopnje.

(b) Ugotovite za katere polinome formula ni več točna.

(c) Naj bo r najnižja stopnja polinoma, pri katerem integracijsko pravilo ni več točno (iz točke (b)). S pomočjo sestavljenega pravila na podintervalih $[-1, 1]$ in $[1, 3]$ izračunajte integral

$$\int_{-1}^{3} x^r dx.$$

Kolikšna je absolutna napaka rezultata?

Rešitev.
(a) Ničli sta $x_1 = -\sqrt{3}/3, x_2 = \sqrt{3}/3$. Rešimo 2x2 sistem $\alpha_1 + \alpha_2 = 2, \alpha_1 * x_1 + \alpha_2 * x_2 = 0$ in dobimo $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Gre za Gaussovo integracijsko pravilo na dveh točkah.
(b) Če ne opazimo, da gre za Gaussovo pravilo, preverimo po vrsti:

$$\begin{array}{lll}
p(x) := x^1 : & \int_{-1}^{1} p(x) = 0 & = (-\sqrt{3}/3) + (\sqrt{3}/3) = p(x_1) + p(x_2) \\
p(x) := x^2 : & \int_{-1}^{1} p(x) = 2/3 & = 1/3 + 1/3 = p(x_1) + p(x_2) \\
p(x) := x^3 : & \int_{-1}^{1} p(x) = 0 & = (-\sqrt{3}/3)^3 + (\sqrt{3}/3)^3 = p(x_1) + p(x_2) \\
p(x) := x^4 : & \int_{-1}^{1} p(x) = 2/5 & \neq 2/9 = (-\sqrt{3}/3)^4 + (\sqrt{3}/3)^4 = p(x_1) + p(x_2)
\end{array}$$

torej je stopnja $r = 4$
(c) Točna vrednost je $244/5 = 48.8$, Gaussovo pravilo vrne: $(x_1)^4 + (x_2)^4 + (2 + x_1)^4 + (2 + x_2)^4 = 48.4444$. Absolutna napaka je 0.35555.

Naloga 3 [15 točk]

Rešujete začetni problem

$$y'' = y' + x, \qquad y(0) = y_z,\; y'(0) = \tilde{y}_z.$$

(a) Določite konstanti C_1, C_2, da bo $y(x) = -x - x^2/2 + C_1 e^x + C_2$ točna rešitev začetnega problema za $y_z = 1, \tilde{y}_z = 1$.

(b) Prevedite diferencialno enačbo na sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda.

(c) Sistem iz točke (b) rešite z enim korakom eksplicitne Eulerjeve metode na intevalu $[0, 1/2]$. Kolikšna sta začetna pogoja $y_z, \tilde{y}_z$, če za vrednost funkcije $y(1/2)$ dobimo numerični približek 1, za odvod $y'(1/2)$ pa -1?

Rešitev.
(a) Iz $y(0) = 1$ dobimo pogoj $C_1 + C_2 = 1$, iz $y'(0) = 1$ pa $C_1 - 1 = 1$. Torej $C_1 = 2$, $C_2 = -1$.

(b) $y_1 := y$, $y_2 := y_1'$, $Y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. $Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2 + x, \end{bmatrix}$.

(c) $Y_1 = Y_0 + hF(0) = \begin{bmatrix} y_z \\ \tilde{y}_z \end{bmatrix} + 1/2 \begin{bmatrix} \tilde{y}_z \\ \tilde{y}_z + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_z + \tilde{y}_z/2 \\ 3/2\,\tilde{y}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Rešimo 2x2 sistem in dobimo $y_z = 4/3, \tilde{y}_z = -2/3$.