

Kaj je funkcija ene spremenljivke?

Funkcija je predpis, ki vsakemu elementu x iz **definičijskega območja** $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ priredi natanko določeno število $f(x) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}_f &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Če $\mathcal{D}_f$ ni podano, je največja množica, kjer ima predpis f smisel.

- ▶ $x \dots$ neodvisna spremenljivka
- ▶ $y = f(x) \dots$ odvisna spremenljivka
- ▶ $f(A) = \{f(x) ; x \in A\} \dots$ **slika** množice $A \subset \mathcal{D}_f$
- ▶ $\mathcal{Z}_f = f(\mathcal{D}_f) \dots$ **zaloga vrednosti** funkcije f
- ▶ $f^{-1}(B) = \{x ; f(x) \in B\} \dots$ **praslika** množice $B \subset \mathcal{Z}_f$

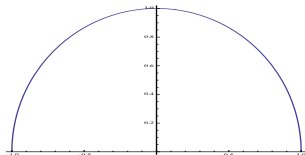
Primeri:

- ▶ $f(x) = y$, kjer je $y = x^4$, je funkcija. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = [0, \infty)$.
- ▶ $f(x) = y$, kjer je $y^4 = x$, ni funkcija.

Graf funkcije in podajanje funkcij

Graf funkcije $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ je krivulja v ravnini:

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) ; x \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



- ▶ Graf funkcije seka poljubno navpično premico največ v eni točki.
- ▶ Projekcija grafa na os x je $\mathcal{D}_f$, projekcija grafa na os y pa je $\mathcal{Z}_f$.

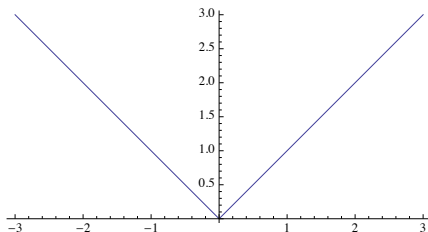
Predpis lahko podamo na več načinov.

- ▶ **eksplicitno**: $y = f(x)$, npr. $y = \sqrt{1 - x^2}$
- ▶ **implicitno**: $F(x, y) = 0$, npr. $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $y \geq 0$
- ▶ **parametrično**: $x = x(t)$, $y = y(t)$, npr.

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, \pi]$$

Primera

1. $f(x) = |x|$



$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}, \mathcal{Z}_f = [0, \infty)$$

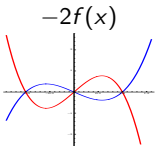
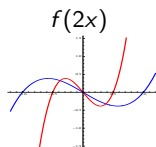
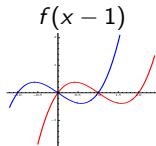
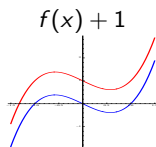
2. $g(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}, \mathcal{Z}_g = \{-1, 0, 1\}$$

Transformacije funkcij

- ▶ $g(x) = f(x - a) \dots$ vodoravni premik za $|a|$ v desno ($a > 0$) oz. levo ($a < 0$)
- ▶ $g(x) = f(x) + c \dots$ navpični premik za $|c|$ navzgor ($c > 0$) oz. navzdol ($c < 0$)
- ▶ $g(x) = f(\frac{x}{a}) \dots$ vodoravni razteg ($a > 1$) oz. skrček ($a < 1$) za faktor a
- ▶ $g(x) = cf(x) \dots$ navpični razteg ($c > 1$) oz. skrček ($c < 1$) za faktor c
- ▶ $g(x) = -f(x) \dots$ zrcaljenje preko osi x
- ▶ $g(x) = f(-x) \dots$ zrcaljenje preko osi y

Denimo, da znamo narisati graf funkcije $y = f(x)$.



Operacije s funkcijami

Naj bosta $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ in $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji. Na preseku $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ lahko definiramo nove funkcije:

- ▶ **vsoto** $f + g$ s predpisom $x \mapsto f(x) + g(x)$,
- ▶ **razliko** $f - g$ s predpisom $x \mapsto f(x) - g(x)$,
- ▶ **produkt** fg s predpisom $x \mapsto f(x)g(x)$,
- ▶ **kvocient** f/g s predpisom $x \mapsto f(x)/g(x)$, če $g(x) \neq 0$.

Če je $Z_f \subseteq \mathcal{D}_g$, potem lahko definiramo funkcijo $g \circ f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

in imenujemo **kompozitum** funkcij g in f .

V splošnem $f \circ g \neq g \circ f$.

Izračunaj kompozituma funkcij

$$f(x) = x^2 + 1, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}, \quad g(x) = \log x^2, \quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Lastnosti funkcij

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ je

- ▶ **naraščajoča**, če velja $f(x_1) \leq f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, ki zadoščata $x_1 \leq x_2$.
- ▶ **padajoča**, če velja $f(x_1) \geq f(x_2)$ za vsaka $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, ki zadoščata $x_1 \leq x_2$.
- ▶ **navzgor omejena**, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, ki za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ zadošča $f(x) \leq M$. Številu M pravimo **zgornja meja** funkcije f na $\mathcal{D}_f$.
- ▶ **navzdol omejena**, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, ki za vsak $x \in \mathcal{D}_f$ zadošča $m \leq f(x)$. Številu m pravimo **spodnja meja** funkcije f na $[a, b]$.
- ▶ **omejena** na $\mathcal{D}_f$, če je na $\mathcal{D}_f$ navzdol in navzgor omejena.
- ▶ **soda**, če je $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$.
- ▶ **liha**, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$.
- ▶ **injektivna**, če različni točki $x \neq y \in \mathcal{D}_f$ preslika v različni vrednosti $f(x) \neq f(y) \in \mathcal{Z}_f$.
- ▶ **surjektivna**, če je $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.
- ▶ **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna.

Primeri

- ▶ Določi, kje sta funkciji $f(x) = x^3$ in $g(x) = x^4$ naraščajoči oz. padajoči.
- ▶ Določi, kateri od funkcij $f(x) = \cos x$ in $g(x) = e^x$ sta omejeni.
- ▶ Preveri:
 - ▶ $f(x) = |x|$, $g(x) = x^{2k}$ za $k \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \cos x$ so sode.
 - ▶ $f(x) = \operatorname{sign}(x)$, $g(x) = x^{2k+1}$ za $k \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \sin x$ so lihe.
 - ▶ $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = x^2 + 2x + 1$ niso ne sode in ne lihe.
- ▶ Premisli:
 - ▶ Graf sode funkcije je simetričen glede na os y , graf lihe pa glede na koordinatno izhodišče.
 - ▶ Vsota sodih funkcij je soda funkcija, vsota lihih je liha funkcija.
 - ▶ Produkt dveh sodih ali dveh lihih funkcij je soda funkcija, produkt lihe in sode funkcije je liha funkcija.
 - ▶ Graf injektivne funkcije seka poljubno vodoravno premico v največ eni točki.
 - ▶ Vsaka vodoravna premica seka graf surjektivne funkcije v vsaj eni točki.

Inverzna funkcija

Naj bo $f: \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ **injektivna** funkcija. Potem funkcijo $f^{-1}: \mathcal{Z}_f \rightarrow \mathcal{D}_f$, za katero velja

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

za vsak $x \in \mathcal{D}_f$, imenujemo **inverzna funkcija** funkcije f .

- ▶ Ekvivalentno: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$.
- ▶ Definijsko območje in zaloga vrednosti se zamenjata:
 $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{Z}_f, \quad \mathcal{Z}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.
- ▶ Inverzno funkcijo f^{-1} eksplicitno podane funkcije f izračunamo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk $y = f(x)$, torej $x = f(y)$, in nato izrazimo y kot funkcijo x .
- ▶ Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da prezrcalimo graf funkcije f prek simetrale lihih kvadrantov.

Inverzna funkcija

Primer

Naj bo dana funkcija

$$f(x) = \frac{2x + 3}{3x - 1}.$$

Določi $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{Z}_f$, f^{-1} (če obstaja), $\mathcal{D}_{f^{-1}}$, $\mathcal{Z}_{f^{-1}}$.