$$\forall x\,(V \wedge W) \sim \forall x\, V \wedge \forall x\, W$$

$$\forall x\,(C \wedge W) \sim C \wedge \forall x\, W$$

v C x ne nastopa (prosto)

Domači premislek: Ali je $(D(x) \wedge \exists w\, D(w)) \sim D(x)$

Prenexna normalna oblika. Kako?

$$\forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \Rightarrow D(x) \wedge \exists x\, D(x) \sim$$

y z w

$$\forall y\, A(y) \vee \exists z\, B(z) \Rightarrow D(x) \wedge \exists w\, D(w) \sim$$

$$\neg(\forall y\, A(y) \vee \exists z\, B(z)) \vee (D(x) \wedge \exists w\, D(w)) \sim$$

$$(\exists y \neg A(y) \wedge \forall z \neg B(z)) \vee \exists w\,(D(x) \wedge D(w)) \sim$$

$$\exists w\,(\exists y\,(\neg A(y) \wedge \forall z \neg B(z)) \vee (D(x) \wedge D(w))) \sim$$

$$\exists w\, \exists y\,(\forall z\,(\neg A(y) \wedge \neg B(z)) \vee (D(x) \wedge D(w))) \sim$$

$$\exists w\, \exists y\, \forall z\,((\neg A(y) \wedge \neg B(z)) \vee (D(x) \wedge D(w)))$$

Domači premislek: vrstni red teh kvantifikatorjev bi bil lahko tudi kakršenkoli drug.

Prenexna normalna oblika ni enolična.

$$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \sim \forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

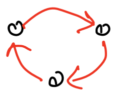
$$\sim \forall x\, P(x) \wedge \forall y\, Q(y) \sim$$

$$\sim \forall x\,(P(x) \wedge \forall y\, Q(y)) \sim$$

$$\sim \forall x\, \forall y\,(P(x) \wedge Q(y))$$

Vemo, da $\forall x \exists y P(x,y) \not\sim \exists y \forall x P(x,y)$

raznovrstnih kvantifikatorjev v splošnem ne moremo menjati.



Toda $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y)) \sim \exists y \forall x (P(x) \wedge Q(y))$

?

$\forall x (P(x) \wedge \exists y Q(y)) \sim$

$\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$ ....

$\neg \exists y \forall x (P(x,y) \Leftrightarrow \neg P(x,x))$ je splošno veljavna.

1.1.	$\exists y \forall x (P(x,y) \Leftrightarrow \neg P(x,x))$	pred RA
1.2.	$\forall x (P(x,w) \Leftrightarrow \neg P(x,x))$	ES (y/w)
1.3.	$P(w,w) \Leftrightarrow \neg P(w,w)$	US (x/w)
1.4	0	$\sim$ 1.3.
1.	$\neg \exists y \forall x (P(x,y) \Leftrightarrow \neg P(x,x))$	RA(1.1, 1.4)

interpretacija: Govorim o elementih in množicah in naj

$P(x,y)$ .... x pripada y.

Množica R, kot smo jo želeli definirati z opisom $R = \{x, x \notin x\}$ NE OBSTAJA.

$x \in A$ element x pripada množici A

$x \notin A$ ..... x ne pripada A

$A = \{0, 1, 2\}$ .... $0 \in A$ in
$1 \in A$ in
$2 \in A$

$A = \{1, 2, 2, 0\}$ .... $1 \in A$ in
$2 \in A$ in
$2 \in A$ in
$0 \in A$

$x \in A$ nttk $\varphi(x)$

$x \in A \iff \varphi(x)$

Ali $R \in R$?

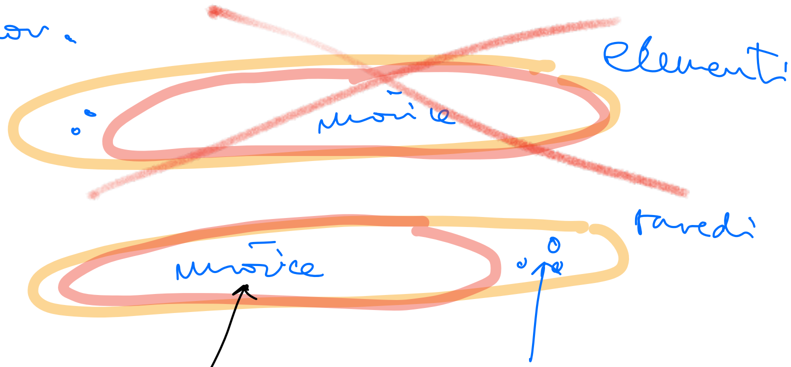
Če da, potem mora R ustrezati $R \notin R$.

Če ne ($R \notin R$), potem pa za R velja, da ustreza $R \notin R$
in zato mora veljati $R \in R$.

!

Ne nujno treba znati.

Razrešitev Russellove antinomije z uporabo razredov.



so tisti razredi, ki lahko kot elementi pripadajo drugim razredom.

Razred A je množica, če $\exists B$ za katerega $A \in B$.

$\vdots$

$M(x)$ .... x je množica

Razred podamo z izjavno formulo takole

$$B = \{x ; \varphi(x) \wedge M(x)\}$$

Kaj se zdaj zgodi z "Russellovim" razredom?

$$R = \{x ; x \notin x \wedge M(x)\}.$$

Ali $R \in R$?

$$R \in R \iff R \notin R \wedge M(R) \sim$$

$$\cancel{(R \in R \wedge R \notin R \wedge M(R))}^{\,0} \vee (R \notin R \wedge \neg(R \notin R \wedge M(R))) \sim$$

$$R \notin R \wedge (R \in R \vee \neg M(R)) \sim$$

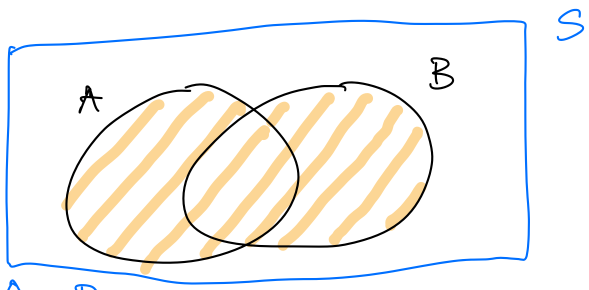
$$\cancel{(R \notin R \wedge R \in R)}^{\,0} \vee (R \notin R \wedge \neg M(R)) \sim$$

$$R \notin R \wedge \neg M(R)$$

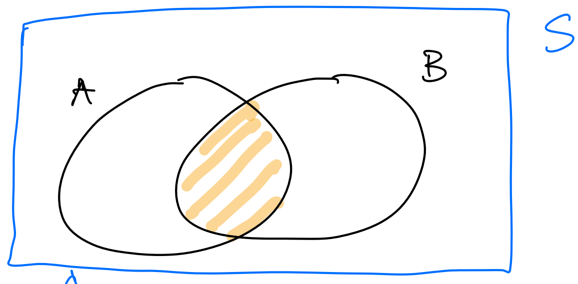
R ne pripada sam sebi in R je pravi razred.

$\subseteq \qquad \subset \qquad\qquad < \qquad \leq$

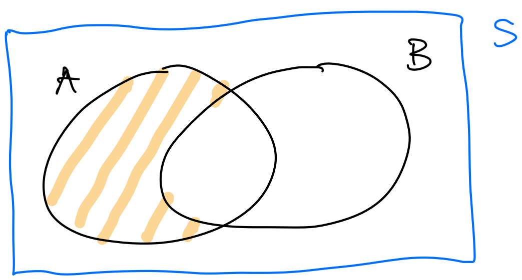
Vennovi diagrami



$A \cup B$

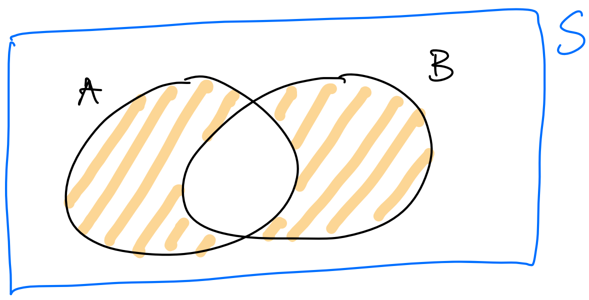


$A \cap B$



$A \setminus B$

A brez B



$A + B$

Dokaz

$A = B$ ....

$\forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ ....

$\forall x\, ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$ ....

$\forall x\, (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x\, (x \in B \Rightarrow x \in A)$ ....

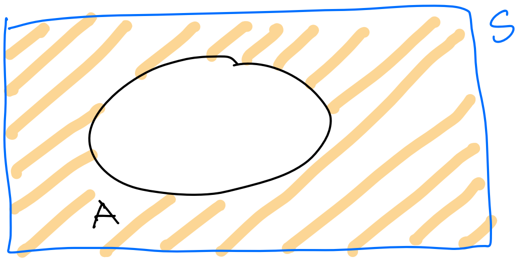
$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. $\square$

$\subseteq$ je usklajena z $\cup, \cap$.

$3 \leq 5$

$3 + 2 \leq 5 + 2$

$3 \cdot 2 \leq 5 \cdot 2$



A^c

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Kako pokažemo, da sta množici enaki?

1. pokažemo obe vsebovanosti
2. vlečemo "enakovrednosti" pripadnosti z uporabo zakonov IR

Dokaz

$x \in A \cup (A \cap B)$ ....

$x \in A \lor x \in A \cap B$ ....

$x \in A \lor (x \in A \land x \in B)$ ....

a .... $x \in A$

b .... $x \in B$

$a \lor (a \land b)$ .... absorpcija

a

$x \in A$ $\square$

Dokaz $A \subseteq B \sim A \cup B = B$.

$(\Longrightarrow)$ Privzamemo, da velja $A \subseteq B$

$A \cup B \subseteq B \cup B$ vsebovanost

$B \subseteq A \cup B \subseteq B$

$A \cup B = B$

$(\Longleftarrow)$ Privzamemo, da velja

$A \subseteq A \cup B = B$

$A \subseteq B$ $\square$

Kako pokažemo, da sta množici enaki?

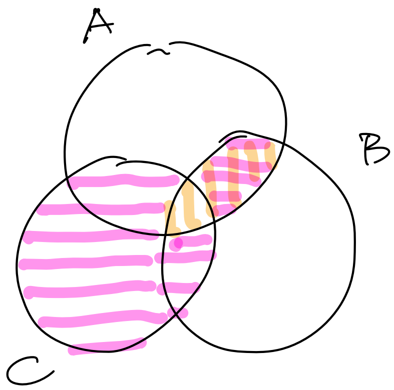
1. pokažemo obe vsebovanosti
2. vlečemo "enakovrednosti" pripadnosti z uporabo zakonov IR

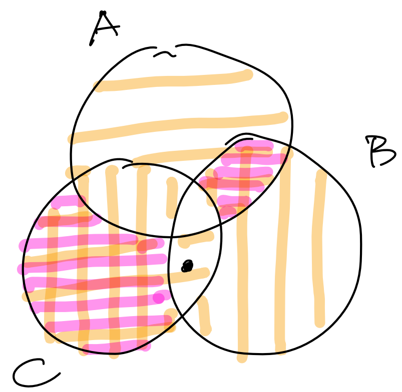
Kako pokažemo, da dve množici nista enaki?

Pokažimo, da množici

$(A \cap B) + C$ in $(A+C) \cap (B+C)$

nista enaki.





x

$B = \{x\}$
$C = \{x\}$
$A = \emptyset$

$x \notin A \cap B$
$x \in C$

$x \in (A \cap B) + C$

$x \in A + C$
$x \notin B + C$

$x \notin (A+C) \cap (B+C)$

$\{a\}$ .... singleton a

$\{a, b\}$ .... par a, b

Dogovor o prednosti operacij z množicami.

$c \mid \cap, \setminus \mid \cup, +$ združevanje z leve

$A + B \cup C + D$ pomeni isto kot
$((A+B) \cup C) + D$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{I} & X \cup A = A \setminus X \\ \mathrm{II} & X \cup A = X \end{array}}$$

iz II sklepamo, da $A \subseteq X$

iz I in II pridelamo $X = A \setminus X = A \cap X^c \subseteq A$

$X = A$! To ni rešitev

če je X rešitev, potem mora biti $X = A$.

I $A = A \cup A = A \setminus A = \emptyset$ ← izpolnjeno samo v primeru, ko $A = \emptyset$.

II $A \cup A = A$ ✓

Sistem je rešljiv natk. $A = \emptyset$ in v tem primeru je $X = \emptyset$ edina rešitev. $\square$