

N M

P05

Naloga

Tirnico gibanja zajca na ravnem travniku v ravnini $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ opisuje krivulja $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + x$. Strugo potoka opisuje premica $y = 2$ in deli travnik na dva dela.

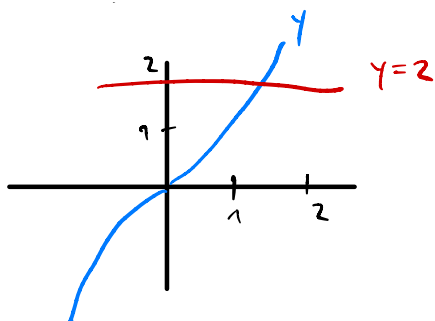
a) Skicirajte tirnico gibanja zajca in strugo potoka v ravnini. Dokazite, da zajec (vsaj enkrat) prečka potok.

b) Radi bi izračunali numerični približek za x -koordinato, kjer zajec prečka potok.

Definirajte smiselno funkcijo f in začetni interval za metodo bisekcije in izvedite 4 korake metode.

Koliko korakov bi potrebovali, da bi se izračunana x -koordinata zagotovo razlikovala od točne za manj kot 10^{-4} ?

a)



$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{2}x^3 + x \\ \hookrightarrow f(x) &= \frac{1}{2}x^3 + x - 2 \\ f(1) &= -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \text{f ima ničlo na } [1, 2] \\ f(2) &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & \boxed{k=1} \\ & a=1, \quad b=2 \Rightarrow x_1 = 1.5 \\ & f(x_1) = 1.1875 \end{aligned}$$

$$\frac{\log\left(\frac{10^{-4}}{1}\right)}{\log 2} \approx 13.3$$

$$\begin{aligned} & \boxed{k=2} \\ & a=1, \quad b=1.5 \Rightarrow x_2 = 1.25 \\ & f(x_2) = 2.2656 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \boxed{k=3} \\ & a=1, \quad b=1.25 \Rightarrow x_3 = 1.125 \\ & f(x_3) = -0.1631 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \boxed{k=4} \\ & a=1.125, \quad b=1.25 \Rightarrow x_4 = 1.1875 \end{aligned}$$

Potrebujeemo 14 korakov metode, da bo napaka zagotovo manjša od 10^{-4} .

(negibne)

Metode fiksne točke

Metodo fiksne točke oz. navadno iteracijo dobimo tako, da enačbo

$$f(x) = 0$$

preoblikujemo v ekvivalentno enačbo

$$g(x) = x.$$

Točki x pravimo **negibna točka** funkcije g .

Algoritem:

1. Izberi začetni približek x_0 .
2. Ponavlaj iteracijo $x_{k+1} = g(x_k)$, dokler tolerančni kriterij ni izpolnjen.

Algoritem: [klik](#)

Primer 3: [klik](#)

Primer 1: [klik](#)

Primer 4: [klik](#)

Primer 2: [klik](#)

IZREK: Naj bo $g(x) = x$ in naj na $I = [x - \delta, x + \delta]$ za $\delta > 0$ velja $|g(x) - g(y)| \leq m |x - y|$ (Lipschitzov pogoj) za $x, y \in I$, $0 \leq m < 1$. Potem zaporedje $(x_i)_i$ konv. k x za nak $x_0 \in I$.

DOKAZ: $|x_{i+1} - x| = |g(x_i) - g(x)| \leq m |x_i - x| \quad (\Rightarrow x_i \in I)$
 $\leq m^2 |x_{i-1} - x|$
 $\vdots$
 $\leq m^i |x_0 - x|$

POSLEDICA: Zadosten pogoj je $|g'(x)| < 1$ za $x \in I$, saj potem velja
 $\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = g'(\xi), \quad \xi \in I$ (Lagrangeov izrek)

Res, saj: $|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| \cdot |x - y| \leq m \cdot |x - y|$, za $m = \max_{x \in I} |g'(x)|$

Za $g(x) = x$ (tj. x je negativna točka) pravimo:
 - x je privlačna točka, če:

$$|g'(x)| < 1, \quad x \in (x - \delta, x + \delta)$$

$\Rightarrow$ konvergenca je zagotovljena za $x_0 \in (x - \delta, x + \delta)$

- x je odbojna točka, če

$$|g'(x)| > 1, \quad x \in (x - \delta, x + \delta)$$

$\Rightarrow$ konvergenca ni za noben $x_0 \in (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}$

IZREK: Naj α v negibni točki α velja $g(\alpha) = \alpha$, $g^{(k)}(\alpha) = 0$, $k = 1, \dots, p-1$ in $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$ (in $|g'(\alpha)| < 1$ za $p=1$). Potem je red konvergence zaporedja (x_i) enak p v določeni točki α , tj. v $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$.

odvisen od x_i

~~Taylor~~

DOKAZ: $x_{i+1} = g(x_i) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \alpha + \frac{1}{p!} (x_i - \alpha)^p g^{(p)}(\xi)$ $\xi \in [\alpha, x_i]$

$|x_{i+1} - \alpha| \leq C |x_i - \alpha|^p$ za $C := \max_{\xi \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)} \left| \frac{g^{(p)}(\xi)}{p!} \right|$.

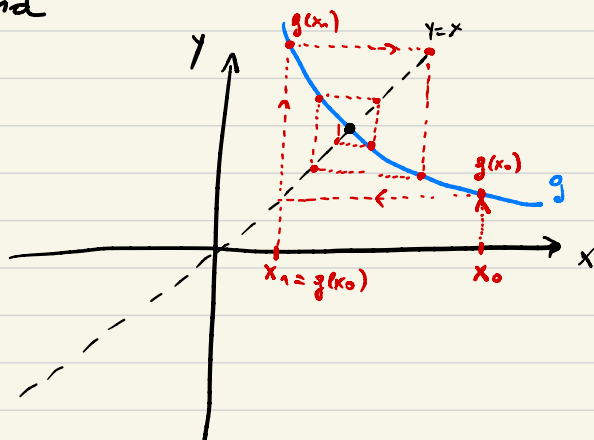
Grafično

izberemo si začetni približek x_0

for $i = 0, 1, 2, \dots$

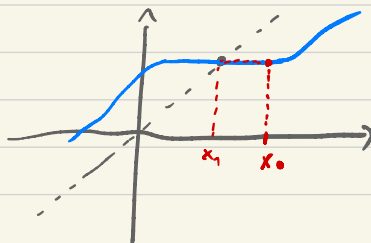
$$x_{i+1} = g(x_i)$$

end



$$(g(\alpha) = \alpha)$$

Manjša kot je vrednost $|g'(x)|$ za $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, hitrejša je konvergenca



Naloga

Iščemo ničlo funkcije $f(x) = x^5 - 10x + 1$.
Dokažite, da leži ena ničla na $[0, 0.2]$.

Izpeljite iteracijsko funkcijo

$$g(x) = \frac{x^5 + 1}{10}$$

ter določite začetni približek x_0 za katerega zaporedje $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$, zagotovo konvergiira k rešitvi.

Rešitev:
$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(0.2) = -0.99968 \end{array} \right\}$$

f je zvezna in
zamenja predznak
 $\Rightarrow$ obstaja ničla

$\Rightarrow$

$$x^5 - 10x + 1 = 0$$

$$x^5 + 1 = 10x$$

$$\frac{x^5 + 1}{10} = x$$

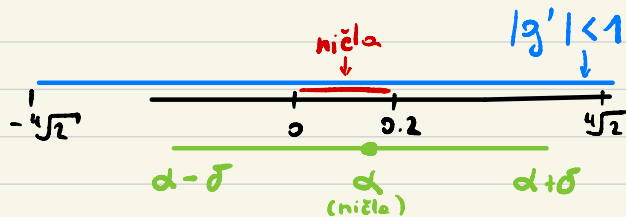
$\underbrace{\hspace{1cm}}_{g(x)}$

$$g'(x) = \frac{5 \cdot x^4}{10} = \frac{x^4}{2}$$

$$\frac{-0.84}{2}$$

$$\frac{0.84}{2}$$

$$|g'(x)| < 1 \Rightarrow \left| \frac{x^4}{2} \right| < 1 \Rightarrow -\sqrt[4]{2} < x < \sqrt[4]{2}$$



želimo čim večji
zeleni interval
znotraj modrega
intervala za α

$\alpha \in [0, 0.2]$, ne vemo kje točno leži

$$\alpha = 0: (\alpha - \delta, \alpha + \delta) = (0 - \sqrt{2}, 0 + \sqrt{2}) = (-0.84, 0.84)$$

$$\underline{\alpha = 0.2}: (\alpha - \delta, \alpha + \delta) = (0.2 - \delta, 0.2 + \delta) = \underline{(-0.44, 0.84)}$$

Najbolj omejujoč primer je $\alpha = 0.2$. Če $x_0 \in (-0.44, 0.84)$, navadna iteracija konvergira k ničli $\alpha \in [0, 0.2]$.

$$\text{Npr. } x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{10}, \quad x_2 = g(x_1) = 0.100001$$

Naloge

Dana je iteracija $x_{k+1} = x_k (3 - 3ax_k + a^2 x_k^2)$,
 $k = 0, 1, 2, \dots$ za $a > 0$.

- Izračunajte negativne točke iteracije. Katere so privlačne / odbojne?
- V okolici privlačnih točk določite red konvergence metode ter območje konvergence.
- Preizkusite za $a = 5$ in $x_0 = 0.1$.

Rešitev: a) $g(x) = x$ oz.

$$x(3 - 3ax + a^2 x^2) = x$$

$$a^2 x^2 - 3ax + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 4a^2 \cdot 2}}{2a^2}$$

$$= \frac{3a \pm a}{2a^2} = \frac{3 \pm 1}{2a}$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{a}, \quad x_2 = \frac{2}{a}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$g'(x) = 3 - 6ax + 3a^2x^2 = 3(a^2x^2 - 2ax + 1) \\ = 3(ax - 1)^2$$

$$|g'(0)| = 3 > 1 \Rightarrow \text{odlojna}$$

$$|g'(\frac{1}{a})| = 0 < 1 \Rightarrow \text{privlačna}$$

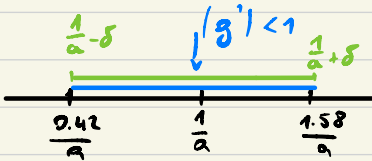
$$|g'(\frac{2}{a})| = 3 > 1 \Rightarrow \text{odlojna}$$

b) Red za ničlo $\frac{1}{a}$:

$$g'(\frac{1}{a}) = 0, \quad g''(\frac{1}{a}) = 6(ax - 1) \cdot a \Big|_{x=\frac{1}{a}} = 0$$

$$g'''(\frac{1}{a}) = 6a^2 \neq 0 \Rightarrow \text{red je kubni}$$

$$|g'(x)| < 1 \Rightarrow 3(ax - 1)^2 < 1 \\ 3a^2x^2 - 6ax + 2 < 0 \\ x_{1,2} = \frac{6a \pm \sqrt{36a^2 - 24a^2}}{6a^2} \\ = \frac{6a \pm \sqrt{12}a}{6a^2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3a} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{3a} < x < \frac{3+\sqrt{3}}{3a} \\ \frac{0.42}{a} & \quad \frac{1.58}{a}$$



Konvergenca na intervalu
 $(\frac{0.42}{a}, \frac{1.58}{a})$

Kubična konvergenca:

$$x_1 = g(0.1) = 0.175$$

$$x_2 = g(x_1) = 0.199603 \dots$$

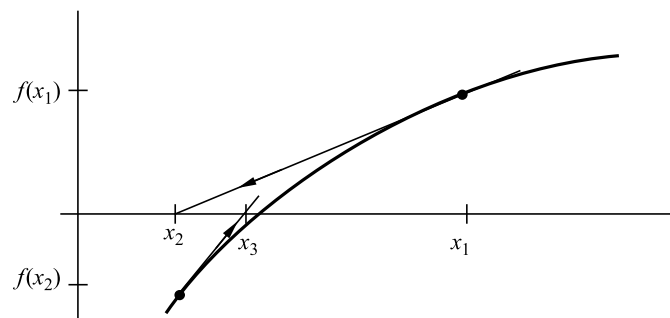
$$x_3 = g(x_2) = 0.199999985$$

Tangentna metoda

Iteracija:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (13)$$

Izpeljava:



Pri trenutnem približku x_k uporabimo funkcijsko vrednost $f(x_k)$ in odvod $f'(x_k)$, da izračunamo naslednji približek. Enačba tangente na krivuljo v točki $(x_k, f(x_k))$ je

$$y = f(x_k) + (x - x_k) f'(x_k).$$

Ker je cilj najti x , tako da je $f(x) = 0$, dobimo

$$0 = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k) f'(x_k)$$

in izrazimo x_{k+1} .

```

1  zacetni podatki:  funkcija f, priblizek  $x_1$ 
2  for  $k = 2, 3, \dots$ 
3       $x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})$ 
4      if  $x_k$  znotraj tolerance, stop
5  end

```

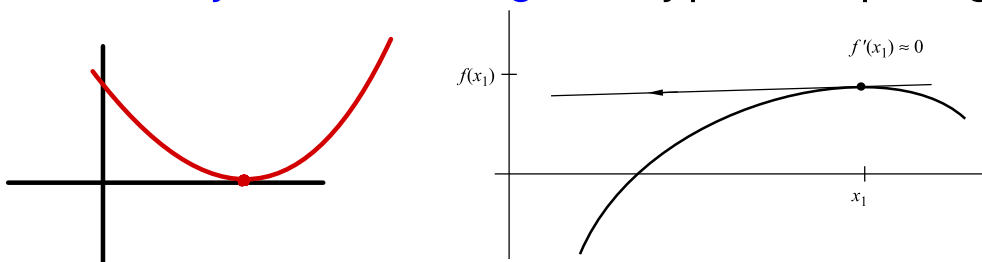
Algoritem: klik

Primer 1: klik

Primer 2: klik

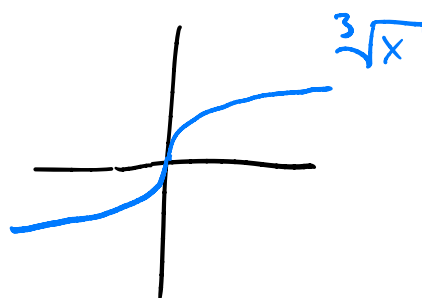
Lastnosti tangentne metode:

- ▶ Konvergira precej hitreje kot bisekcija - **red konvergence je vsaj 2**, tj. na vsakem koraku se število točnih decimalok podvoji.
- ▶ Zahteva **analitično formulo za $f'(x)$** - če tega ne poznamo, lahko uporabimo sekantno metodo (sledi).
- ▶ **Ni nujno, da konvergira**, saj približki pobegnejo:



148/259

Primer, ko olivergina:



$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

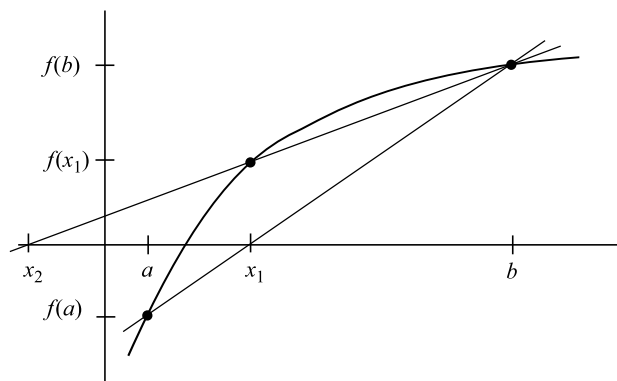
v sekantni metodi odvod
zamenjamo z diferenco

Sekantna metoda

Iteracija:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \left[\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \right] \approx \frac{1}{f'(x_k)} \quad (14)$$

Izpeljava:



S pomočjo dveh zaporednih približkov x_{k-1} in x_k , za nov približek vzamemo x-koordinato presečišča sekantne skozi točki $(x_k, f(x_k))$ in $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ z abscisno osjo.

Naj bosta dana

x_k = trenutni približek za ničlo, x_{k-1} = prejšnji približek za ničlo.

Aproksimiramo prvi odvod z naklonom sekante skozi točki $(x_k, f(x_k))$ in $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Vstavimo to aproksimacijo v (13) in dobimo (14).

```
1  zacetni podatki:  f, x1, x2
2  for k = 2,3...
3      xk+1 = xk - f(xk)(xk - xk-1)/(f(xk) - f(xk-1))
4      if je izpolnjen tolerancni pogoj, stop
5  end
```

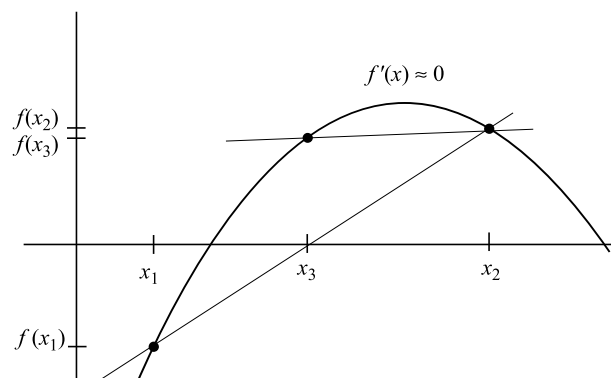
[Algoritem: klik](#)

[Primer 1: klik](#)

[Primer 2: klik](#)

Lastnosti sekantne metode:

- ▶ Konvergenca je podobna tisti pri tangentni metodi. **Red je ≈ 1.62** , tj. na vsakem koraku se število točnih decimalk pomnoži z 1.62.
- ▶ **Ne potrebujemo odvoda $f'(x)$.**
- ▶ **Naslednji približek ne ostane nujno** znotraj začetnega intervala:



Vidimo, da bo nov približek x_{k+1} , daleč vstran od prejšnjega, če bo $f(x_k) \approx f(x_{k-1})$.

Naloga

Rešujemo enačbo $3x^3 + 2x - 1 = 0$.

- Preverite, da ima enačba vsaj eno rešitev na intervalu $[0, 1]$.
- Uporabite tangentsko metodo. Z začetnim približkom $x_0 = 0$ izračunajte prve tri približke rešitve.

Rešitev: a) $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ f(1) &= 4 \end{aligned} \Rightarrow f \text{ zamenja predznaka, } \text{torej obstaja ničla}$$

b) $f'(x) = 9x^2 + 2$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{3x_k^3 + 2x_k - 1}{9x_k^2 + 2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0.5$$

$$x_2 = 0.411765$$

$$x_3 = 0.402413$$

$$x_4 = 0.40231994 \dots$$

Točna rešitev: $0.40231993 \dots$