

relacija "manjše ali enako" v množici $\mathbb{N}$

$$(1, 3) \in \leq \dots 1 \leq 3$$

$$\leq = \{ (x, y), x, y \in \mathbb{N} \text{ in } \exists z \in \mathbb{N} \}$$

$$y = x + z$$

	REFL	SIM	ANTI.	TRAN	SOV	ENO
$\leq$ v $\mathbb{A}$	✓	✓	✓	✓	///	✓
$\leq$ v $\mathbb{N}$	✓	///	✓	✓	✓	///
$<$ v $\mathbb{N}$	///	///	✓*	✓	✓	///
$\subseteq$ v $\mathcal{PA}$	✓	///	✓	✓	///	///
"oče" ljude	///	///	✓*	///	///	///

x "oče" y ... x je oče od y oca

$$A = \{a, b, c\}$$

$$a \overset{\cdot}{id}_A a \dots a = a$$

$$id_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$



evalot v množici A

evalot množice

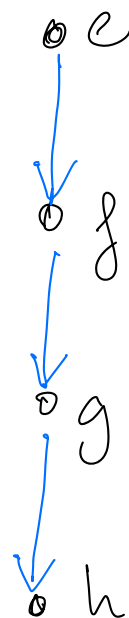
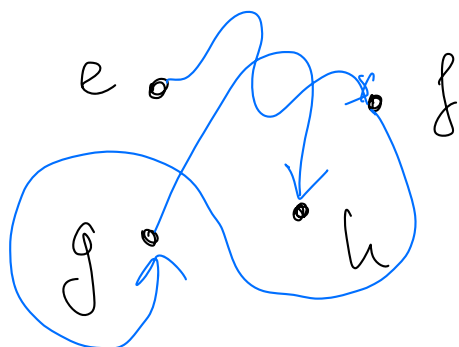
$$= \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

evalot v množici A

Grafica predstavitev relacije

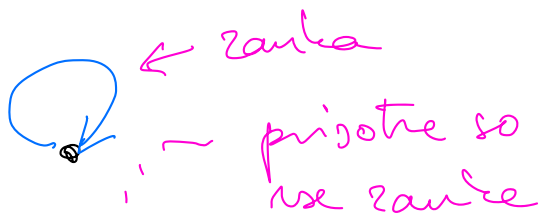
$$R = \{(e, f), (f, g), (g, h)\}$$

$$A = \{e, f, g, h\}$$

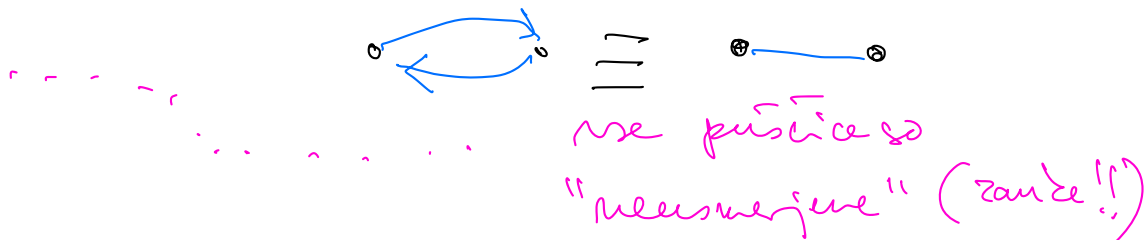


Lastnosti iz grafa

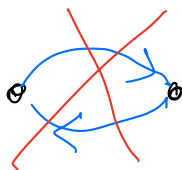
1. Refleksivnost



2. Simetrija

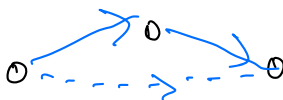


3. Antisimetrija

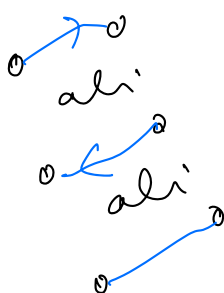


nimam parov
vesprotno usmerjenih
puščic

4. Transitivnost

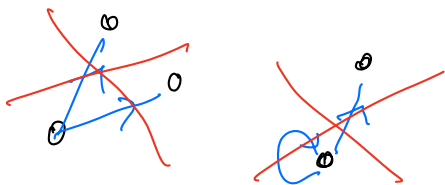


5. Sorisnost



med vsakima
dve točkama je
puščica

6. Enoličnost



iz vsake točke
gre ven največ
ena puščica

R, S relaciji $\sim A$ ($\subseteq A \times A$)

$R \cup S, R \cap S, R + S, R \setminus S$

$$\leq \text{ na } \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \leq^c &= \{ (x, y), x, y \in \mathbb{N}, x \neq y \} = \\ &= \{ (x, y), x, y \in \mathbb{N}, x > y \} = > \end{aligned}$$

Inverzna relacija,
 $a R^{-1} b$ natanko tedaj, ko je $b R a$.

$\leq^{-1}$ je natanko relacija $\geq$

$\subseteq^{-1}$ je natanko relacija $\supseteq$

Doma! Kaj je $\subseteq^c$

$x R * S z$ natanko tedaj, ko obstaja y
 za katerega velja

$$x R y \text{ in } y S z.$$

$$\text{roditeli}' = \text{mati} \cup \text{oče}$$

$\times \text{roditeli}' \gamma \dots$

$\times \text{oče} \gamma \text{ Ali } \times \text{mati} \gamma$

ker $\text{mati} \cap \text{oče} = \emptyset$ nelič hodi

$$\text{oče} = \text{roditeli}' \setminus \text{mati}$$

$$\begin{aligned} \text{ded} &= (\text{oče} * \text{oče}) \cup (\text{oče} * \text{mati}) = \\ &\quad \text{oče} * (\text{oče} \cup \text{mati}) = \text{oče} * \text{roditeli}' \end{aligned}$$

$\times \text{oče} * \text{oče} \neq \dots$

$\exists \gamma \times \text{oče} \gamma \text{ in } \gamma \text{oče} \neq \dots$

$$\begin{aligned} \text{muk} &= (\text{sin} * \text{sin}) \cup (\text{sin} * \text{hči}) = \\ &= \text{sin} * (\text{sin} \cup \text{hči}) = \text{sin} * \text{otroč} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tata} &= (\text{mati} * \text{žena}) \cup (\text{mati} * \text{mož}) \quad \times \text{tata} \gamma \dots \\ &= \text{mati} * (\text{žena} \cup \text{mož}) = \text{mati} * \text{žalovec} \end{aligned}$$

$$\text{zet} = \text{mož} * \text{hči} \cup \text{mož} * \text{sin} = \text{mož} * \text{otroč}$$

$$\text{snaka} = \text{žena} * \text{sin} \cup \text{žena} * \text{hči} = \text{žena} * \text{otroč}$$

$$\begin{aligned} \text{snak} &= \text{brat} * \text{žena} \cup \text{brat} * \text{mož} \cup \text{mož} * \text{sestra} \\ &\quad \cup \text{mož} * \text{brat} = \\ &\quad \text{brat} * \text{žalovec} \cup \text{mož} * \text{soročenec} \end{aligned}$$

$$! \quad \text{ded}^{-1} \neq \text{muk}$$

$$\text{roditeli}'^{-1} = \text{otroč}$$

$$\begin{aligned} &\cup \\ &\text{žena} * \text{sin} \neq \\ &\text{sin} * \text{žena} \end{aligned}$$

Lastnosti operacij

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$

2.

$$x (R * S)^{-1} z \dots$$

$$z (R * S) x \dots$$

$$\exists y: z R y \text{ in } y S x \dots$$

$$\exists y: x S^{-1} y \text{ in } y R^{-1} z \dots$$

$$x (S^{-1} * R^{-1}) z$$

$$(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$$

3.

$$x (R * S) * T y \dots$$

$$\exists u: x(R * S)u \text{ in } uTy \dots$$

$$\exists u: \exists v (xRv \text{ in } vSu) \text{ in } uTy \dots$$

$$\exists u \exists v: \cancel{xRv \text{ in } vSu} \not\text{ in } uTy \dots$$

$$\exists v \exists u: (xRv \text{ in } vSu \text{ in } uTy) \dots$$

$$\exists v (xRv \text{ in } \exists u (vSu \text{ in } uTy)) \dots$$

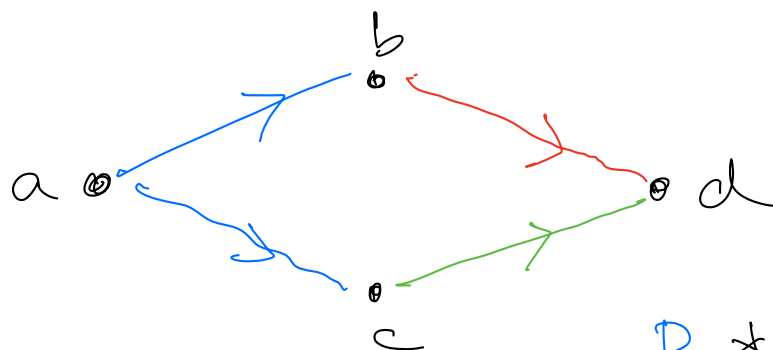
$$\exists v (xRv \text{ in } v(S * T)) \dots$$

$$x R * (S * T) y$$

$$(R * S) * T = R * (S * T)$$

Aci je * komutativ?

Aci je $\mid$ $R * S = S * R$? **NE**
vedu



$$R * (S \cap T) \neq (R * S) \cap (R * T)$$

$$\left. \begin{array}{l} a R * S d \\ a R * T d \end{array} \right\} a ((R * S) \cap (R * T)) d$$

Toda,

$$\neg a R * (S \cap T) d, \text{ jer } S \cap T = \emptyset.$$

$$\text{ker je } R * (R * R) = (R * R) * R$$

$$R^3 = R * (R * R)$$

$$R^1 = R^0 * R = \text{id}_A * R = R$$

$$R^2 = R^1 * R = R * R$$

$$R^3 = R^2 * R = (R * R) * R = R * R * R$$

$$R^{-1}$$

$$R^{-n} = (R^{-1})^n$$

$$R^{-5} * R^{-7} = (R^{-1})^5 * (R^{-1})^7 = \\ = (R^{-1})^{12} = R^{-12}$$

Paci, $R^5 * R^{-3}$ v splnení mi
ealo R^2

* prednik y ...

* roditeli y ali * roditeli * roditeli y ali

* roditeli * roditeli * roditeli y ali ...

* potomec y ...

$$\text{prednik}^{-1} = \text{potomec}$$

* srodnik y ... * in y inata
shyrega predika

... $\exists z$

z predik x in z predik y

... $\exists z$

x potomec z in z predik y

..... $\times$ potonec $\times$ prednik γ

$$\begin{aligned}\text{Soročnik} &= \text{potonec} \times \text{prednik} \\ &= \text{prednik}^{-1} \times \text{prednik}^1 \\ &\neq \text{prednik}^0 = \text{id}_{\text{gndje}}\end{aligned}$$

R^+

..... transitivna ovojica relacije R

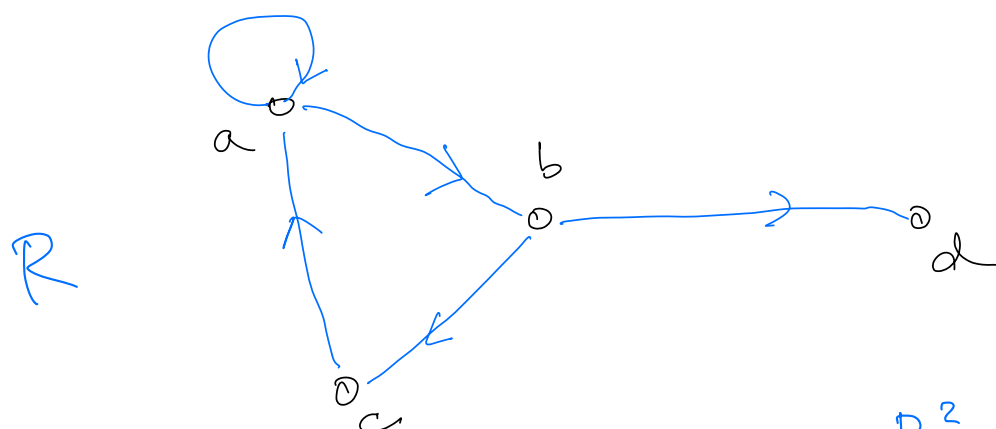
- 1) R^+ je transitivna
- 2) $R^+ \supseteq R$
- 3) in R^+ je najmanjša med relacijami, ki kateri veljata 1) in 2)

R^*

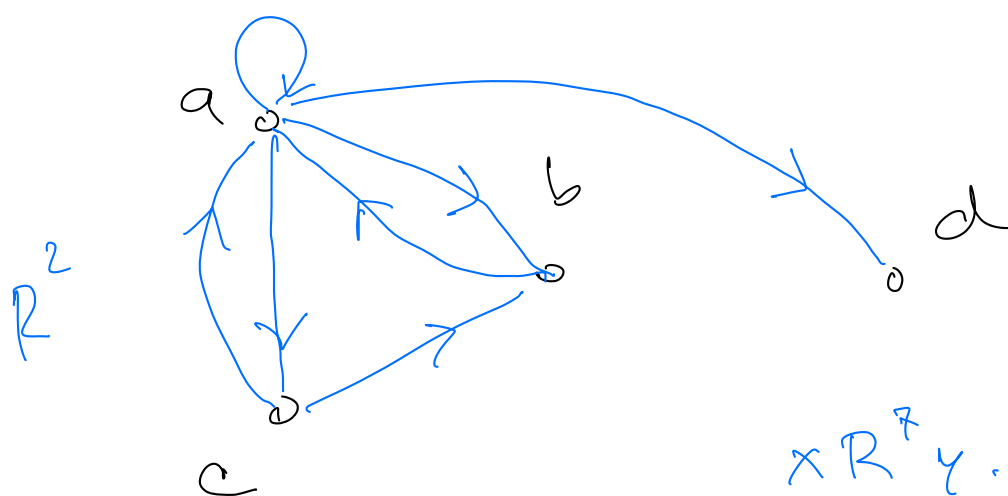
..... transitivna refleksivna ovojica

- 1) R^* je transitivna in refleksivna
- 2) $R^* \supseteq R$
- 3) in R^* je najmanjša med relacijami, ki kateri veljata 1) in 2)

Graf relaciji R in potence



aR^*d in
 $\neg dR^Td$.



$xR^2y \dots xR \circ R y \dots$

$\dots \exists z: xRz \wedge zRy$

$\dots$ v grafu R
lahko od

x do y pridev
v dveh korakih.

$xR^7y \dots$

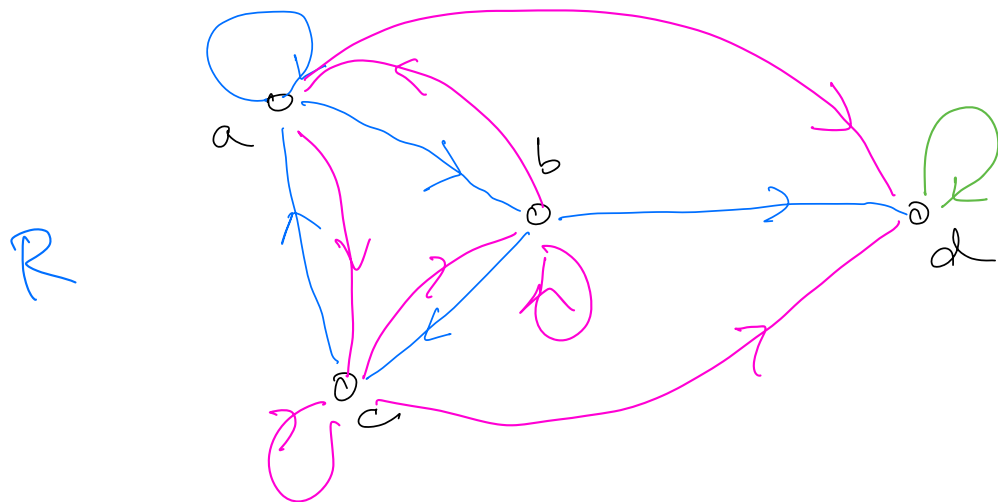
v grafu R lahko

pridem od x do y v
naključno 7 korakih.

$$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup \dots$$

$xR^+y \dots$ v grafu relacije R lahko pridev
od x do y v nekaj (≥ 1) korakih.

$xR^*y \dots$ v grafu relacije R lahko pridev od
 x do y v nekaj (≥ 0) korakih $\dots$
tj. lahko stojim kdi ne vestim.



kaj ji $\bar{R}$
vs R^+ ?

R^+

kaj ji $\bar{R}$ vs R^* ?

Komentar.

Relaciji prednik in potomec sta
transitivni. (seveda, ker gre za
transitivni ovojnic
relacij voditelj oz. otrok)

x prednik y in y prednik $z \implies$
 x prednik z .

Algebraična karakterizacija transitivnosti

$x R y$ in $y R z \implies x R z$

$x R \circ R z \implies x R z$

$R^2 \subseteq R$

za transitivno
relacijo

$R^2 \circ R \subseteq R \circ R$

$R^3 \subseteq R^2$

$R^4 \subseteq R^3$

$R^5 \subseteq R^4$

$$\mathbb{R} \supseteq \mathbb{R}^2 \supseteq \mathbb{R}^3 \supseteq \mathbb{R}^4 \supseteq \mathbb{R}^5 \supseteq \dots$$

$$\mathbb{R}^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}^k = \mathbb{R}$$

Preslikave.

$f: A \rightarrow B$... f je preslikava iz A v B

~~$$\log: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$~~

$$\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \in f \quad \dots \quad x f y \quad \dots \quad y = f(x)$$

$$x \xrightarrow{\quad} y \quad \text{relacijski preslikave}$$

$$f: x \mapsto y$$

Zaprav $y = f(x)$ je smiselno, ker je f enolična.

ne obstaja različna y in z ,
zakaj? li velja $x f y$ in $x f z$
 $y = f(x)$ in $z = f(x)$

f_1 . Ali lahko vadi nepravni
bitni lesedi evolucio definiramo
njeno sterbo seric (in je to sterbo ravno sterbo)

$1101 f_1 3$, $111 f_1 3$, $000 f_1 0$,
 $1010101 f_1 4$

$$f_1: X \rightarrow Y$$

f_2 . $1101 f_2 1$, $000 f_2 0$, $010 f_2 0$

$$f_2: X \rightarrow Y$$

f_3 . $10110 f_3 2$, $0001 f_3 1$, $111 f_3$

$$111 \notin Df_3$$

f_3 je kot relacija evolucija, toda
ker $Df_3 \neq X$, relacija f_3 NI
preslikava iz X v Y .

f_4 .

$$1110 f_4 11101$$

$$1010 f_4 10100$$

toda

$$1010 f_4 10101$$

} f_4 NI evolucija

f_5

5 f_5 11111

4 f_5 1111

toda

0 f_5

f_5 je evolutia, toda

$0 \notin \mathcal{D}_{f_5}$

in rata

f_5 ni preschiana
 $\{2 \nmid n \mid X\}$.

injection alt.

$\forall x, y \in A : (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$

preschiana

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto e^x$

$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \sin x$

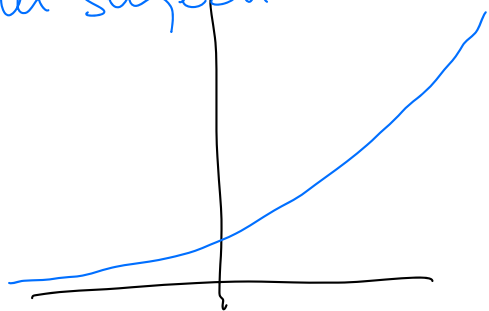
$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \arctan x$

"kubiranje": $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

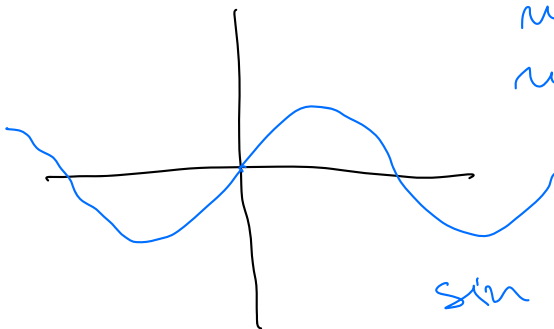
$x \mapsto x^3$

injection
ni surjection



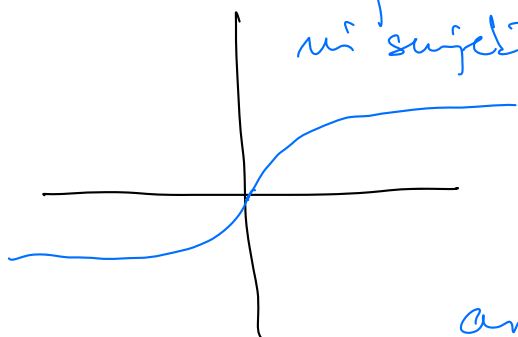
$\exp$

ni injection
ni surjection



$\sin$

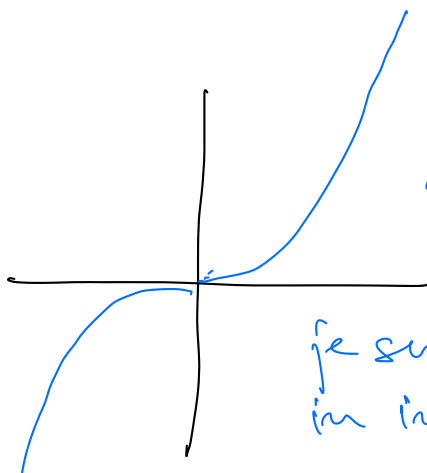
injection
ni surjection



$\arctan$

$x \mapsto x^3$

je surjection
in injection



Dona, poŝcite predikato $R \rightarrow R$, ki ĝi
sugestio en ni sugestio