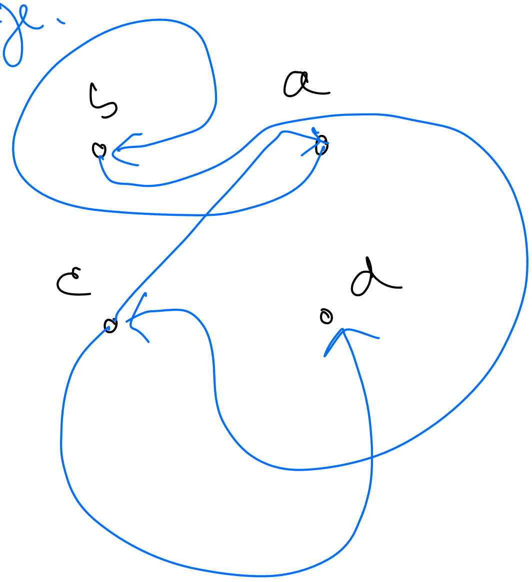
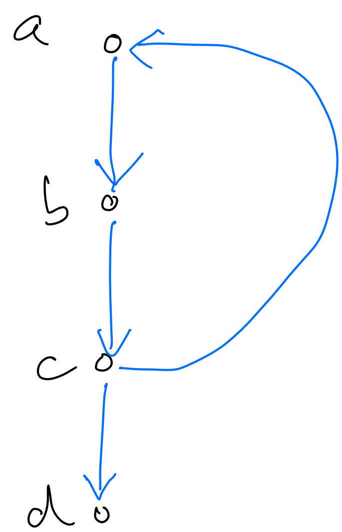
17. 11. 2025

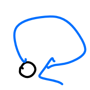
		refl.	sim	antisim	tranz	sov.	ekv.
id_A	na A	✓	✓	✓	✓	✗	✓
$\leq$	na $\mathbb{N}$	✓	✗	✓	✓	✓	✗
$<$	na $\mathbb{N}$	✗	✗	✓*	✓	✓	✗
$\subseteq$	$\mathcal{P}A$	✓	✗	✓	✓	✗	✗
"oče"	"ljudje"	✗	✗	✓*	✗	✗	✗

Graf relacije:

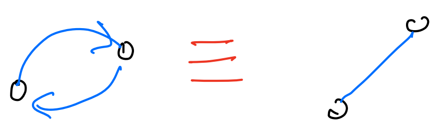




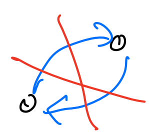
refleksivnost — prisotne so vse zanke

 ← zanka

simetrija — vse puščice so "dvosmerne"



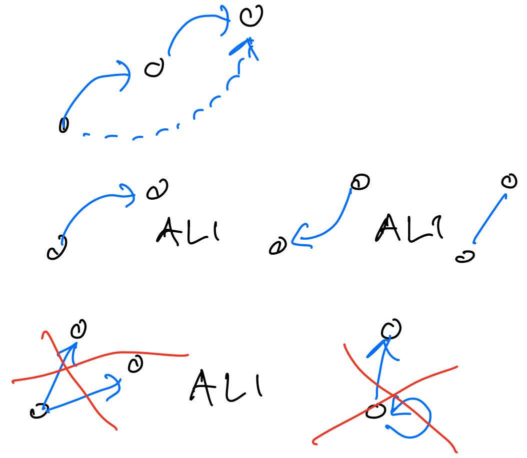
antisimetrija — nimam parov nasprotno usmerjenih puščic



tranzitivnost — prisotne so vse bližnjice

sovisnost — med vsakima dvema elementoma imamo puščico

enoličnost — iz vsake točke gre ven lahko največ ena puščica



$\leq$ v $\mathbb{N}$ kaj je $\leq^c$

$$\leq^c = \{(a,b),\ a,b\in\mathbb{N},\ \neg(a\leq b)\}$$
$$= \{(a,b),\ a,b\in\mathbb{N},\ a>b\} = >$$

$\leq^c$ je relacija $>$

kaj je $\subseteq^c$ (v $\mathcal{P}A$)

R^{-1}

$\leq$ v $\mathbb{N}$, kaj je $\leq^{-1}$

$$\leq^{-1} = \{(a,b),\ a,b\in\mathbb{N},\ b\leq a\}$$
$$= \{(a,b),\ a,b\in\mathbb{N},\ a\geq b\} = \geq$$

$\leq^{-1}$ je relacija $\geq$

$\subseteq^{-1}$ je relacija $\supseteq$

$x \; R * S \; z$ ntk $\exists y \, (x R y$ in $y S z)$

$x R \boxed{y} S z$

---

roditelj = oče $\cup$ mati

oče = roditelj $\setminus$ mati

x roditelj y ....

x oče y ali x mati y

oče $\cap$ mati $= \emptyset$

x oče * oče y .....

$\exists z$ (x oče z in z oče y)

ded = oče * oče $\cup$ oče * mati = oče * (oče $\cup$ mati) = oče * roditelj

vnuk = sin * sin $\cup$ sin * hči = sin * (sin $\cup$ hči) = sin * otrok

sin * žena

$\neq$

snaha = žena * sin $\cup$ žena * hči = žena * otrok

zet = mož * hči $\cup$ mož * sin = mož * otrok

tašča = mati * mož $\cup$ mati * žena = mati * (mož $\cup$ žena) = mati * zakonec

svak = brat * žena $\cup$ brat * mož $\cup$ mož * sestra $\cup$ mož * brat

= brat * zakonec $\cup$ mož * sestra $\cup$ mož * brat =

= brat * zakonec $\cup$ mož * sorojenec

$\text{ded}^{-1} \overset{?}{=} \text{mož}$ NE

$\text{roditelj}^{-1} = \text{otrok}$

$$(a \cdot b)^{-1} \overset{!}{\neq} a^{-1} \cdot b^{-1}$$

2)
$$x \, (R * S)^{-1} \, y \; \ldots\ldots \; y \, R * S \, x \; \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \; \exists z \, (y R z \text{ in } z S x)$$
$$\ldots\ldots \; \exists z \, (x S^{-1} z \text{ in } z R^{-1} y)$$
$$\ldots\ldots \; x \, (S^{-1} * R^{-1}) \, y$$

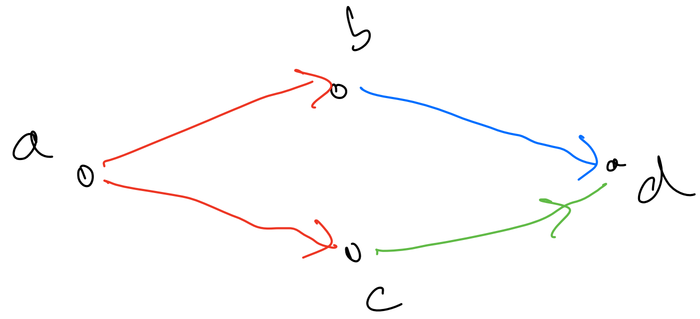
$$(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$$

3)
$$x \, (R * S) * T \, y \; \ldots\ldots \; \exists u \, (x \, R * S \, u \text{ in } u T y) \ldots$$
$$\ldots\ldots \; \exists u \, (\exists v \, (x R v \text{ in } v S u) \text{ in } u T y) \ldots$$
$$\ldots\ldots \; \exists u \, \exists v \, ((x R v \text{ in } v S u) \text{ in } u T y)$$
$$\ldots\ldots \; \exists v \, \exists u \, (x R v \text{ in } (v S u \text{ in } u T y))$$
$$\ldots\ldots \; \exists v \, (x R v \text{ in } \exists u \, (v S u \text{ in } u T y))$$
$$\ldots\ldots \; \exists v \, (x R v \text{ in } v \, S * T \, y)$$
$$\ldots\ldots \; x \, R * (S * T) \, y$$

$$(R * S) * T = R * (S * T) =: R * S * T$$

Pokažimo, da

$$R * (S \cap T) \text{ v splošnem ni enako } (R*S) \cap (R*T)$$



$$\left.\begin{array}{l} a \; R*S \; d \\ a \; R*T \; d \end{array}\right\} \quad a \; (R*S) \cap (R*T) \; d$$

$$S \cap T = \emptyset$$

$$x \; R*(S \cap T) \; y \quad \ldots \quad \exists z \quad xRz \text{ in } z \; S \cap T \; y$$

$$\neg \; a \; R*(S \cap T) \; d$$

Lastnost: 8.) $R * \emptyset = \emptyset * R = \emptyset$

$$R^3 := (R * R) * R = R * (R * R)$$

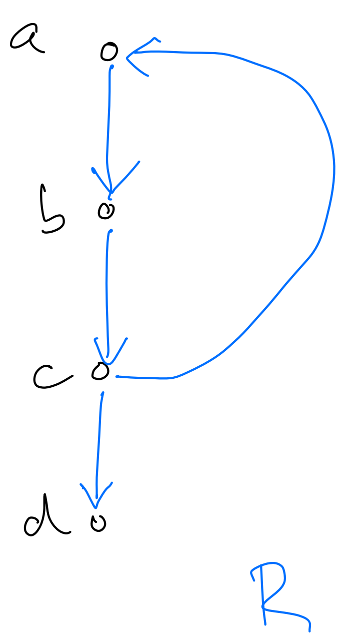
$$R^1 = R^0 * R = id_A * R = R$$

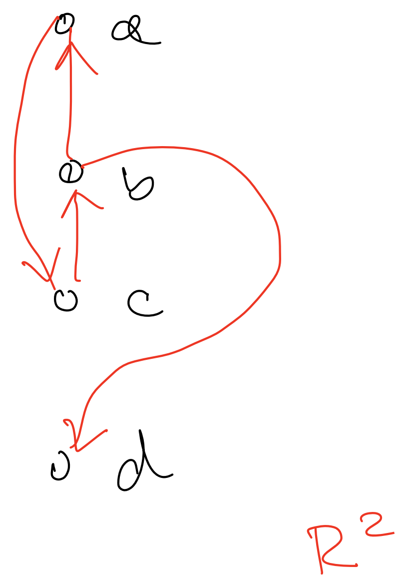
$$R^2 = R^1 * R = R * R$$

$$R^3 = R^2 * R = (R*R)*R = R*R*R$$

$$R^{-5} * R^{-7} = (R^{-1})^5 * (R^{-1})^7 = (R^{-1})^{12} = R^{-12}$$

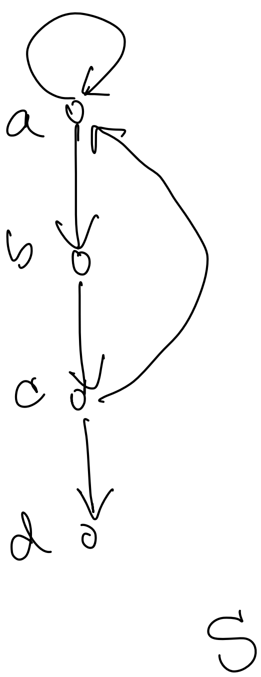
Toda, v splošnem $R^{-5} * R^7 \neq R^2$

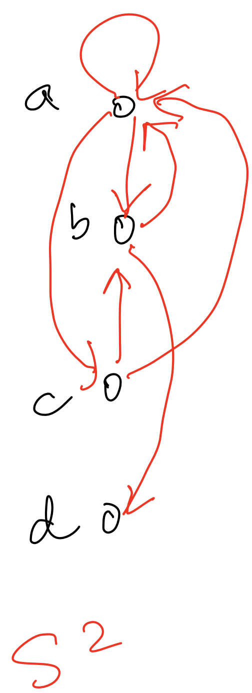




$x \, R*R \, y \quad \ldots,$

$\exists z \, (x R z \text{ in } z R y)$





$\text{prednik}^{-1} = \text{potomec}$

x sorodnik y ..... x in y imata skupnega prednika

..... $\exists z\,(z \text{ prednik } x \text{ in } z \text{ prednik } y)$

..... $\exists z\,(x \text{ potomec } z \text{ in } z \text{ prednik } y)$

..... x potomec $*$ prednik y

sorodnik = potomec $*$ prednik

$= \text{prednik}^{-1} * \text{prednik}^{1}$ $\not=$

$\text{prednik}^{0} = \text{id}_{\text{ljudje}}$

- - - - - - - - - - - - - - -

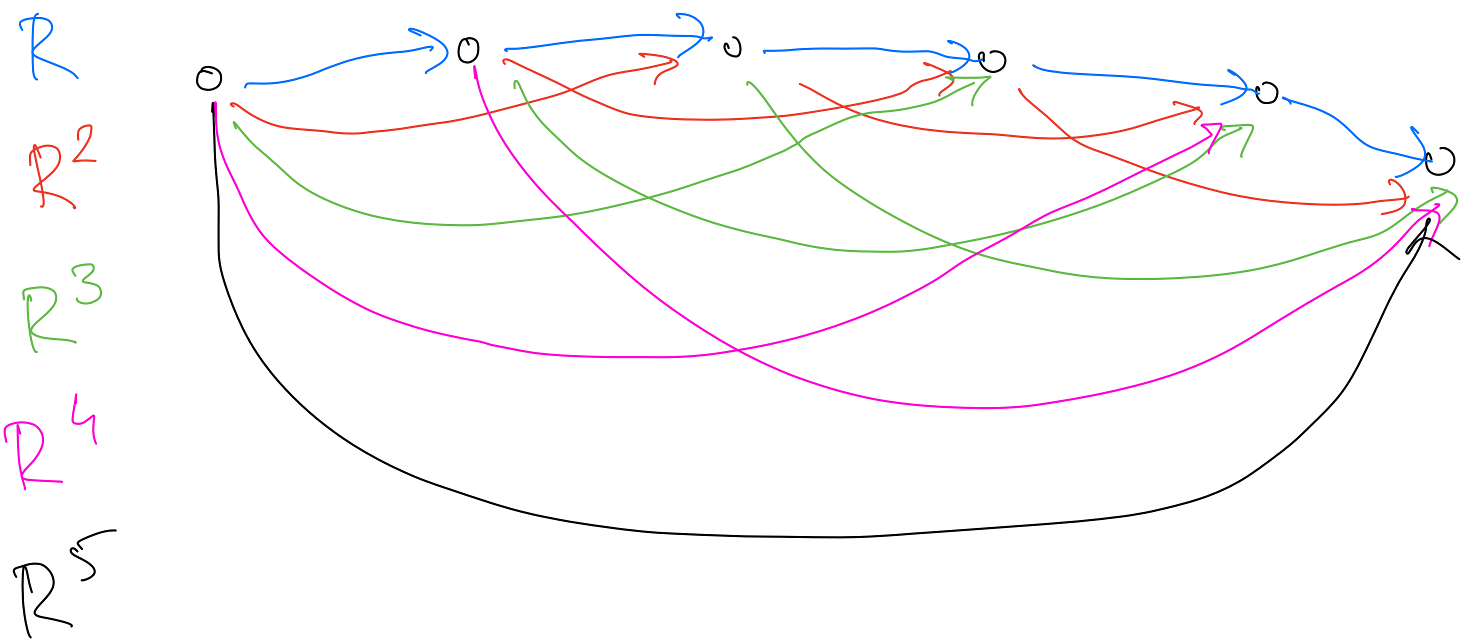
R^* tranzitivno-refleksivna

R^+ je tranzitivna ovojnica relacije R

1) R^+ je tranzitivna — R^* je tranzitivna in refleksivna

2) $R \subseteq R^+$ — $R \subseteq R^*$

3) R^+ (R^*) je "najmanjša" med relacijami, za katere veljata 1) in 2)



<u>Trditev</u> R^+ je tranzitivna.

$(R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots)$

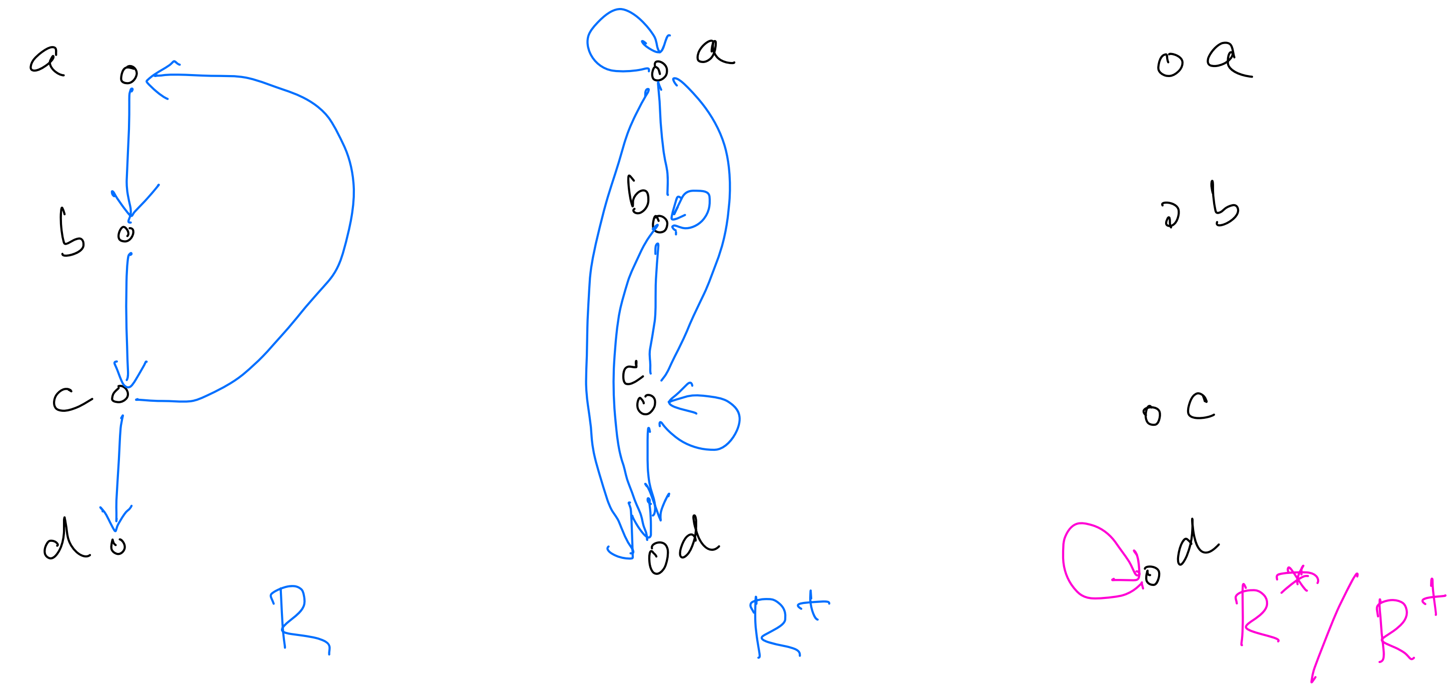
<u>Dokaz</u> Naj bo $x R^+ y$ in $y R^+ z$. Pokazati je treba, da $x R^+ z$.

Po definiciji R^+ $\exists k$ za katerega $x R^k y$
$\exists \ell$ za katerega je $y R^\ell z$.

V tem primeru pa je $x\, R^k * R^\ell\, z \equiv$
$x\, R^{k+\ell}\, z$

Zato je tudi $x R^+ z$. $\blacksquare$

Kako na grafu relacije opišemo R^+ in R^*



$x R^+ y$ ..... v grafu relacije R lahko pridem od x do y v nekaj (≥ 1) korakih

$x R^* y$ ... v grafu relacije R lahko pridem od x do y v nekaj (≥ 0) korakih, pri čemer lahko stojim na mestu.

Algebraična karakterizacija tranzitivnosti

R je tranzitivna rel. $\quad R = R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

$\longrightarrow$ od tod sledi $\quad R^2 \subseteq R$

$$R^3 = R^2 * R \subseteq R * R = R^2$$

$R^3 \subseteq R^2$
$R^4 \subseteq R^3$
$\vdots$

$$R \supseteq R^2 \supseteq R^3 \supseteq R^4 \supseteq \dots$$

$\longrightarrow$ če $R^2 \subseteq R$, potem iz xRy in yRz sledi xR^2z in iz tod xRz ∎

1) $p \parallel q$ .... p ima "isto smer" kot q

2)

3) x in y dasta isti ostanek pri deljenju z m.

$x R x$, saj m deli 0. Refl.

Če $x R y$ .... m deli $|x-y|$

potem m deli $|y-x|$

in zato $y R x$ Sim.

Če $x R y$ in $y R z$ ....

m deli $x-y$ in

m deli $y-z$

m deli $(x-y)+(y-z) = x-z$

$x R z$. Tranz.

4. $\sim$ je ekvivalenca relacija v množici izjavnih izrazov.

5. "imata isto vrednost" v množici evrskega drobiža

"skovana iz iste kovine" —— " ——

"imata isto državo porekla" —— " ——

"imata isto vrednost IN sta iz iste države"

6. "sta iste znamke" v množici avtomobilov na parkirišču

"sta iste barve" — " —

"sta iste znamke IN parkirana v isti vrsti"

— " —