

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [10 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Preko LU razcepa z delnim pivotiranjem izračunajte rešitev linearnega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Rešitev.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$ dobimo

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iz $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dobimo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Naloga 2 [10 točk]

Prepotovano pot avtomobila (v km) v odvisnosti od časa $t \in [0, 4]$ opisuje funkcija $p(t) = 1/2 t^3 + 5t$. Z numeričnimi postopki bi radi izračunali, kdaj avtomobil prepotuje razdaljo 10 km.

Prevedite iskanje t , ko avtomobil prepotuje želeno razdaljo, na iskanje ničle funkcije f . Določite najmanjši celoštevilski interval, kjer ima f zagotovo ničlo. Omenjeni interval vzemite za začetni interval metode bisekcije in izvedite 3 korake. Najmanj koliko korakov metode bi potrebovali, da bi se izračunani približek od točne ničle razlikoval zagotovo za manj kot 10^{-5} ?

Rešitev.

Funkcija $f(t) = 1/2 t^3 + 5t - 10$ zamenja predznak na $[1, 2]$, torej ima na tem intervalu ničlo. Po treh korakih iteracije dobimo približke 1.5 in 1.75, 1.6250. Ker je $\log(10^5)/\log(2) \approx 16.6$, potrebujemo 17 korakov metode, da bo napaka zagotovo manjša od 10^{-5} .

Naloga 3 [10 točk]

V računalniškem CAD programu imamo podano krivuljo, opisano s predpisom $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3|x| + 3x^2$, ki bi jo radi aproksimirali z enostavnejšo krivuljo preko reševanja polinomskega interpolacijskega problema.

Zapišite interpolacijski polinom v Newtonovi obliki, ki interpolira vrednosti funkcije f pri $x = -1$ in $x = 0$, pri $x = 2$ pa se ujema tako v vrednosti kot v odvodu funkcije f . Za koliko se razlikujeta funkcija f in interpolacijski polinom pri $x = 1$?

Rešitev.

$$f(-1) = 6$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 18$$

$$f'(2) = (3|x| + 3x^2)'|_{x=2} = (3 + 6x)|_{x=2} = 15.$$

Trikotna shema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & & & \\ 0 & \mathbf{-6} & & \\ 18 & 9 & \mathbf{5} & \\ 18 & 15 & 3 & \mathbf{-2/3} \end{bmatrix}$$

Interpolacijski polinom: $p(x) = 6 - 6(x + 1) + 5(x + 1)x - 2/3(x + 1)x(x - 2)$.

Razlika je $|f(1) - p(1)| = 6 - (5 + 1/3) = 2/3$.