

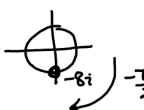
Osnove matematične analize: prvi kolokvij

26. november 2025

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

a) (9 točk) Poišči vse kompleksne rešitve $z \in \mathbb{C}$ enačbe $z^3 + 8i = 0$.

$$z^3 = -8i$$


$$z = re^{i\varphi}$$

$$z^3 = r^3 e^{i3\varphi}$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

$$3\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\varphi_k = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2$$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$$

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

$$z_0 = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

b) (8 točk) Za kateri $\alpha \in \mathbb{C}$ je za vse $z \in \mathbb{C}$

$$z^4 + z^3 \bar{z} - z^3 + 8iz + 8i\bar{z} - 8i = (z^3 + \alpha)(z + \bar{z} - 1)?$$

$$z^4 + z^3 \bar{z} - z^3 + \alpha z + \alpha \bar{z} - \alpha$$

$$8i(z + \bar{z} - 1) = \alpha(z + \bar{z} - 1)$$

$$\alpha = 8i$$

c) (8 točk) Poišči vse rešitve enačbe $z^4 + z^3 \bar{z} - z^3 + 8iz + 8i\bar{z} - 8i = 0$.

Namig: Pomagaj si z rezultati a) in b).

Iz b) vemo, da je $I = (z^3 + 8i)(z + \bar{z} - 1)$. Torej bo $I = 0$ za:

i) $z^3 + 8i = 0 \rightarrow$ rešitve so z_0, z_1 in z_2 iz a)

$$\text{ii) } z + \bar{z} - 1 = 0$$

$$z = x + iy \rightarrow x + iy + x - iy - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$\underline{x = \frac{1}{2}} \rightarrow \text{rešitve so } \underline{z = \frac{1}{2} + iy \text{ za } y \in \mathbb{R}}$$

2. naloga (25 točk)

Dano je zaporedje s prvim členom $a_1 = 0$ in rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} + 1).$$

a) (9 točk) Z uporabo matematične indukcije dokaži, da je zaporedje monotono.

baza: $n=1$ $a_1 = 0$ $a_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{0} + 1) = \frac{1}{2}$
 $a_2 > a_1$

ind. korak: $n \rightarrow n+1$ vemo: $a_n > a_{n-1}$
 RBV: $a_{n+1} > a_n$?

$\sqrt{a_n} > \sqrt{a_{n-1}}$ $|+1$
 $\sqrt{a_{n+1}} > \sqrt{a_{n-1}} + 1$ $|\cdot \frac{1}{2} \oplus$
 $\frac{1}{2}(\sqrt{a_n} + 1) > \frac{1}{2}(\sqrt{a_{n-1}} + 1)$
 $a_{n+1} > a_n$

$\Rightarrow$ zaporedje je naraščajoče

b) (9 točk) Z uporabo matematične indukcije dokaži, da je zaporedje omejeno.

Dokažemo, da je $a_n < 1$ za vse n :

baza: $n=1$ $a_1 = 0 < 1$

ind. korak: $n \rightarrow n+1$ vemo: $a_n < 1$
 RBV: $a_{n+1} < 1$?

$\sqrt{a_n} < \sqrt{1}$ $|+1$
 $\sqrt{a_n} + 1 < 1 + 1$ $|\cdot \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}(\sqrt{a_n} + 1) < \frac{1}{2} \cdot 2$
 $a_{n+1} < 1$

Je naraščajoče omejeno.

c) (7 točk) Ali obstaja limita zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Zakaj oziroma zakaj ne? Če obstaja, jo poišči.

Ker je zaporedje naraščajoče in naraščajoče omejeno, je konvergentno (limita obstaja).

$a_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} + 1)$
 $\downarrow n \rightarrow \infty$ $\downarrow n \rightarrow \infty$
 $a = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + 1)$ $|\cdot 2$
 $2a = \sqrt{a} + 1$
 $2a - 1 = \sqrt{a}$ $|\wedge 2$
 $(2a - 1)^2 = a$
 $4a^2 - 4a + 1 = a$

$4a^2 - 5a + 1 = 0$
 $D = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$
 $a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{8}$ $\rightarrow 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
 $\rightarrow \frac{1}{4}$

ni OK,
 $a_2 = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ in
 zaporedje narašča

3. naloga (25 točk)

a) (10 točk) S pomočjo korenskega kritereja določi ali vrsta konvergira oz. divergira.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2-n}$$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n(n-1)}} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+2} - \frac{1}{n+2} \right)^{n-1} \rightarrow \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n-1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{t-3}$$

$$\rightarrow \frac{\left(1 - \frac{1}{t} \right)^t}{\left(1 - \frac{1}{t} \right)^3} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{je konvergentna}$$

$t = n+2$
 $n-1 = t-3$

b) (10 točk) Dana je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n(1-x)^n$. Za katere vrednosti $x \in \mathbb{R}$ dana vrsta konvergira?

$$a_n = 3^n(1-x)^n = \underbrace{(3-3x)}_2^n$$

$$|2| < 1 \quad ?$$

$$|3-3x| < 1$$

$$|3(1-x)| < 1$$

$$3|1-x| < 1$$

$$|1-x| < \frac{1}{3}$$

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & ; \quad 1-x \geq 0 \quad (x \leq 1) \\ x-1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

i) $x \leq 1$

$$1-x < \frac{1}{3}$$

$$-x < -\frac{2}{3}$$

$$\underline{\underline{x > \frac{2}{3}}}$$

$$x \in \left(\frac{2}{3}, 1 \right]$$

ii) $x > 1$

$$x-1 < \frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{x < \frac{4}{3}}}$$

$$x \in \left(1, \frac{4}{3} \right)$$

$\rightarrow$ ✓

konvergira za $x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$

c) (5 točk) Za tiste x iz b), za katere vrsta konvergira, jo izračunaj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 2^2 + \dots = 2(1 + 2 + 2^2 + \dots) = \frac{2}{1-2} = \frac{3-3x}{1-(3-3x)} = \underline{\underline{\frac{3-3x}{-2+3x}}}$$

4. naloga (25 točk)

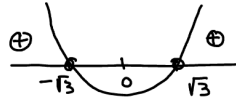
Naj bo $f(x) = \arctan(\sqrt{x^2 - 3})$.

a) (8 točk) Določi definicijsko območje D_f funkcije f . Ali je f injektivna?

$$D_{\arctan} = \mathbb{R}$$

$$D_f = [0, \infty)$$

$$x^2 - 3 \geq 0 \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \geq 0$$

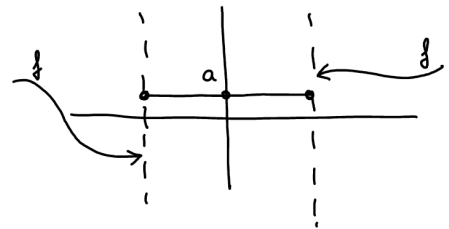


$$\underline{\underline{D_f = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)}}$$

f ni injektivna, ker je $\underline{\underline{f(-\sqrt{3}) = \arctan 0 = f(\sqrt{3})}}$.

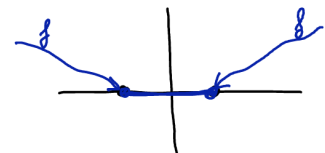
b) (5) Definirajmo funkcijo

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in D_f, \\ a & ; x \notin D_f. \end{cases}$$



Ali lahko izberemo vrednost a , da bo funkcija g zvezna?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \arctan \sqrt{x^2 - 3} = \arctan 0 = \underline{\underline{0}} \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \arctan \sqrt{x^2 - 3} = \arctan 0 = \underline{\underline{0}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{za } a=0 \text{ bo } g \text{ zvezna}$$



c) (12 točk) Zapiši enačbi tangent na graf funkcije f pri $x = 2$ in $x = -2$. V kateri točki se tangenti sekata?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 - 3})^2} \cdot (\sqrt{x^2 - 3})' = \frac{1}{1 + x^2 - 3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3}} (x^2 - 3)' = \\ &= \frac{1}{x^2 - 2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3}} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2 - 2)\sqrt{x^2 - 3}} \\ f'(\pm 2) &= \frac{\pm 2}{2 \cdot 1} = \pm 1 \end{aligned}$$

$$\underline{x=2} \quad y = \arctan \sqrt{4-3} = \arctan 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

$$\underline{x=-2} \quad y = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

$$y - \frac{\pi}{4} = 1(x - 2)$$

$$y - \frac{\pi}{4} = -1(x - (-2))$$

$$\underline{\underline{y = x - 2 + \frac{\pi}{4}}}$$

$$\underline{\underline{y = -x - 2 + \frac{\pi}{4}}}$$

$$x - 2 + \frac{\pi}{4} = -x - 2 + \frac{\pi}{4}$$

$$2x = 0$$

$$\underline{\underline{x=0}} \quad \underline{\underline{y = \frac{\pi}{4} - 2}}$$

prerečišče: $(0, \frac{\pi}{4} - 2)$