

Diskretne strukture VSP: prvi kolokvij

26. 11. 2025

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena.

Vse odgovore dobro utemelji!

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

a) (18 točk) S pomočjo matematične indukcije dokaži, da je za vsako naravno število n izraz $4^{2n+2} - 15n - 16$ deljiv s 25.

Za dokaz z indukcijo moramo dokazati bazo indukcije in induksijski korak. Baza indukcije je trditev da $25|4^{2n+2} - 15n - 16$ velja za $n = 0$, induksijski korak pa implikacija

$$25|4^{2n+2} - 15n - 16 \implies 25|4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16.$$

Baza indukcije je trivialna: vstavimo $n = 0$ in dobimo

$$4^{2n+2} - 15n - 16 = 4^2 - 15 \cdot 0 - 16 = 0$$

in število 0 je deljivo s 25.

Induksijski korak dokažemo s pogojnim sklepom. Predpostavimo, da za n velja $25|4^{2n+2} - 15n - 16$ in poskusimo dokazati, da $25|4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16$.

$$25|4^{2n+2} - 15n - 16 \implies 4^{2n+2} - 15n - 16 = 25k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Izraz pri $n + 1$ preoblikujemo

$$\begin{aligned} 4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16 &= 16 \cdot 4^{2n+2} - 15n - 15 - 16 = \\ &= 16 \cdot 4^{2n+2} - 16 \cdot 15n + 15 \cdot 15n - 16 \cdot 16 + 15 \cdot 16 - 15 = \\ &= 16(4^{2n+2} - 15n - 16) + 225n - 225 = \\ &= 16(4^{2n+2} - 15n - 16) + 25 \cdot 9 \cdot (n - 1) \end{aligned}$$

Prvi člen je po induksijski predpostavki deljiv s 25, iz drugega člena smo 25 lahko izpostavili.

b) (7 točk) S pomočjo matematične indukcije dokaži, da je za vsako naravno število n izraz $4^{2n+2} - 15n - 16$ deljiv z 9.

Ostro oko pove, da lahko večino dela recikliramo.

Baza indukcije: za $n = 0$ je izraz enak 0 in je deljiv z 9.

Induksijski korak: Privzemimo, da pri nekem naravnem številu n število 9 deli izraz $4^{2n+2} - 15n - 16$.

Za izraz pri $n + 1$ v skladu z zgornjim računom velja enakost

$$4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16 = 16(4^{2n+2} - 15n - 16) + 25 \cdot 9 \cdot (n - 1)$$

in ponovno sklepamo kot zgoraj. Prvi člen je po induksijski predpostavki deljiv s 9, iz drugega člena smo 9 izpostavili.

2. naloga (25 točk)

a) (13 točk) Ali je naslednji sklep pravilen?

$$p \wedge \neg q, \quad r \Rightarrow q, \quad s \wedge t \Rightarrow r \quad \models \quad s \Rightarrow \neg t$$

Dokaži sklep ali poišči protiprimer!

Sklep lahko dokažemo na različne načine. Direktno ali z uporabo pomožnih sklepov. Dovolj je, da navedemo en dokaz.

Direkten dokaz:

1. $p \wedge \neg q$ pred.
2. $r \Rightarrow q$ pred.
3. $s \wedge t \Rightarrow r$ pred.
4. $\neg q$ Po(1)
5. $\neg r$ MT(2, 4)
6. $\neg(s \wedge t)$ MT(3, 5)
7. $s \Rightarrow \neg t$ $\sim$ (6)

Dokaz s pogojnim sklepom:

1. $p \wedge \neg q$ pred.
2. $r \Rightarrow q$ pred.
3. $s \wedge t \Rightarrow r$ pred.
4. $\neg q$ Po(1)
5. $\neg r$ MT(2, 4)
6. $\neg(s \wedge t)$ MT(3, 5)
- 7.1 s pred. PS
- 7.2 $\neg s \vee \neg t$ $\sim$ (6)
- 7.3 $\neg t$ DS(7.2, 7.1)
7. $s \Rightarrow \neg t$ PS(7.1-7.3)

Dokaz s protislovjem:

1. $p \wedge \neg q$ pred.
2. $r \Rightarrow q$ pred.
3. $s \wedge t \Rightarrow r$ pred.
- 4.1 $\neg(s \Rightarrow \neg t)$ pred. RA
- 4.2 $s \wedge t$ $\sim$ (4.1)
- 4.3 r MP(3, 4.2)
- 4.4 q MP(2, 4.3)
- 4.5 $\neg q$ Po(1)
- 4.6 $\neg q \wedge q$ Zd(4.5, 4.4)
- 4.6 0 $\sim$ (4.6)
- 4 $s \Rightarrow \neg t$ RA(4.1-4.6)

b) (12 točk) Ali je naslednji sklep pravilen?

$$p \wedge \neg q, \quad q \Rightarrow r, \quad r \Rightarrow s \wedge t \quad \models \quad \neg t \Rightarrow s$$

Dokaži sklep ali poišči protiprimer!

Sklep ni pravilen.

Poiščimo protiprimer. Iščemo vrednosti spremenljivk p, q, r, s, t pri katerih so predpostavke pravilne in zaključek napačen:

$$p \wedge \neg q \sim 1, \quad q \Rightarrow r \sim 1, \quad r \Rightarrow s \wedge t \sim 1, \quad \neg t \Rightarrow s \sim 0.$$

Ker naj bo predpostavka $p \wedge \neg q$ pravilna, je $p \sim 1$ in $q \sim 0$. Ker zaključek ne sme biti pravilen, je $s \sim 0$ in $t \sim 0$.

Vrednost r določimo iz tretje predpostavke — ker je $s \wedge t$ z zgornjimi izbirami vrednosti lažen, mora biti $r \sim 0$. Potem pa samo preverimo, da je s tako izbranimi vrednostmi resnična tudi druga predpostavka.

Protiprimer je torej nabor

$$p \sim 1, \quad q \sim 0, \quad r \sim 0, \quad s \sim 0, \quad t \sim 0.$$

3. naloga (25 točk)

Dana je izjavna formula

$$(\forall z P(z) \wedge \exists x \forall w Q(x, w)) \vee \exists x \exists y Q(x, y) \vee \exists y P(y).$$

a) (15 točk) Zapiši njeno preneksno normalno obliko.

Spremenljivki x in y nastopata v različnih delih formule, zato vpeljemo novi spremenljivki u, v :

$$(\forall z P(z) \wedge \exists x \forall w Q(x, w)) \vee \exists u \exists v Q(u, v) \vee \exists y P(y).$$

Nato zapišemo prvi člen disjunkcije v preneksni normalni obliki, saj člena ne vsebujeta skupnih spremenljivk

$$(\forall z P(z) \wedge \exists x \forall w Q(x, w)) \sim \forall z \exists x \forall w (P(z) \wedge Q(x, w)).$$

Podobno lahko iz disjunkcije na desni prenesemo kvantifikatorje proti začetku formule in dobimo preneksno normalno obliko za celotno formulo:

$$(\forall z P(z) \wedge \exists x \forall w Q(x, w)) \vee \exists u \exists v Q(u, v) \vee \exists y P(y) \sim \\ \forall z \exists x \forall w \exists u \exists v \exists y ((P(z) \wedge Q(x, w)) \vee Q(u, v) \vee P(y)).$$

b) (10 točk) Poišči njeno preneksno normalno obliko s čimmanjšim številom kvantifikatorjev. Možno je zapisati preneksno normalno obliko z zgolj tremi kvantifikatorji. Najprej preimenujemo spremenljivko w v z

$$(\forall z P(z) \wedge \exists x \forall z Q(x, z)) \vee \exists x \exists y Q(x, y) \vee \exists y P(y).$$

To smemo narediti, ker je obratna smer (preimenovanje tega z -ja v novo spremenljivko w dopustna). Potem zamenjamo vrstni red eksistenčnih kvantifikatorjev v $\exists y \exists x$ in iz zadnjih dveh členov *disjunkcije* izpostavimo $\exists y$:

$$(\forall z P(z) \wedge \exists x \forall z Q(x, z)) \vee \exists y (\exists x Q(x, y) \vee P(y))$$

in ga v naslednjem koraku nesemo na skrajni začetek

$$\exists y ((\forall z P(z) \wedge \exists x \forall z Q(x, z)) \vee \exists x Q(x, y) \vee P(y)).$$

Nato izvlečemo $\exists x$ iz globine prvega člena disjunkcije in pridelamo

$$\exists y (\exists x (\forall z P(z) \wedge \forall z Q(x, z)) \vee \exists x Q(x, y) \vee P(y)).$$

Izpostavimo $\exists x$ iz prvih dveh členov disjunkcije in ga izvlečemo proti začetku

$$\exists y \exists x ((\forall z P(z) \wedge \forall z Q(x, z)) \vee Q(x, y) \vee P(y)),$$

potem pa izpostavimo $\forall z$ iz prve konjunkcije in ga v dveh korakih izvlečemo na začetek

$$\exists y \exists x (\forall z (P(z) \wedge Q(x, z)) \vee Q(x, y) \vee P(y)) \sim$$

$$\exists y \exists x \forall z ((P(z) \wedge Q(x, z)) \vee Q(x, y) \vee P(y)).$$

4. naloga (25 točk)

a) (13 točk) Pokaži, da za poljubne množice A, B in C velja vsebovanost

$$(A + B) \setminus C \subseteq B \setminus (A + C) \cup A \setminus (B \cup C).$$

Preoblikujmo množico na levi strani:

$$\begin{aligned}(A + B) \setminus C &= (A \setminus B \cup B \setminus A) \setminus C = (A \cap B^c \cup B \cap A^c) \cap C^c = \\ &= A \cap B^c \cap C^c \cup B \cap A^c \cap C^c = A \cap (B \cup C)^c \cup B \cap (A \cup C)^c = \\ &= A \setminus (B \cup C) \cup B \setminus (A \cup C)\end{aligned}$$

Zdaj pa, prvi člen zgornje unije je enak drugemu členu prvotne desne strani. Po drugi strani pa velja vsebovanost $A + C \subseteq A \cup C$ in posledično tudi

$$B \setminus (A \cup C) \subseteq B \setminus (A + C).$$

S tem je prvi del naloge pod streho.

b) (12 točk) Naj bosta zdaj A in B disjunktni, torej velja $A \cap B = \emptyset$. Pokaži, da velja enakost

$$(A + B) \setminus C = B \setminus (A + C) \cup A \setminus (B \cup C).$$

Iz prejšnje točke že vemo, da je

$$(A + B) \setminus C \subseteq B \setminus (A + C) \cup A \setminus (B \cup C).$$

Za dokaz enakosti je potrebno preveriti zgolj nasprotno vsebovanost

$$B \setminus (A + C) \cup A \setminus (B \cup C) \subseteq (A + B) \setminus C,$$

oziroma, ker je

$$(A + B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \cup B \setminus (A \cup C)$$

je dovolj, ob upoštevanju $A \cap B = \emptyset$, premisliti zgolj, da velja enakost

$$B \setminus (A \cup C) = B \setminus (A + C).$$

Računajmo.

$$\begin{aligned}B \setminus (A + C) &= B \cap (A + C)^c = B \cap (A \cap C^c \cup C \cap A^c)^c = \\ &= B \cap (A^c \cup C) \cap (C^c \cup A) = \quad \quad \quad (\text{dvakratna uporaba de Morgana}) \\ &= B \cap A^c \cap C^c \cup B \cap A^c \cap A \cup B \cap C \cap C^c \cup B \cap C \cap A = \\ &= B \cap A^c \cap C^c = B \cap (A \cup C)^c = B \setminus (A \cup C)\end{aligned}$$

Pri tem smo skok iz predzadnje v zadnjo vrstico lahko naredili, ker so trije členi unije prazni.

Prav zadnji člen je prazen zato, ker sta A in B disjunktni.

S tem smo zaključili tudi z drugo podtočko.