

Diskretne strukture UNL, vaje, 23.12.2025

2. Dana je permutacija

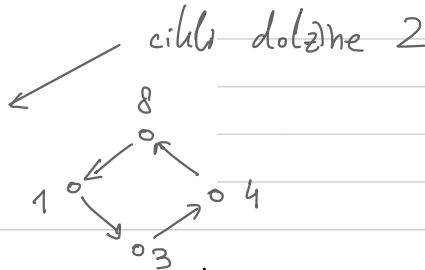
$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Določi π^{-1} .

(b) Zapiši π kot produkt disjunktnih ciklov.

(c) Zapiši π kot produkt samih transpozicij.

(d) Določi π^2 in π^{2025} .



$$(a) \quad \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 8 & 6 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4\ 8)(2)(5\ 6\ 7)$$

$$(b) \quad \pi = (1\ 8\ 4\ 3)(2)(5\ 7\ 6) = (1\ 8)(1\ 4)(1\ 3)(5\ 7)(5\ 6).$$

(c)

$$(d) \quad \pi^2 = \pi * \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 1 & 6 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2)(3\ 8)(5\ 6\ 7).$$
$$\quad \quad \quad \parallel$$
$$\quad \quad \quad (1\ 8\ 4\ 3)^2 * (5\ 7\ 6)^2$$

$$\pi^{2025} = (1\ 8\ 4\ 3)^{2025} * (5\ 7\ 6)^{2025} = (1\ 8\ 4\ 3)(5)(7)(6) = (1\ 8\ 4\ 3).$$

$$2025 \equiv 1 \pmod{4} \quad 2025 \equiv 0 \pmod{3}$$

1. Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ in } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zapiši α in β kot produkt disjunktnih ciklov.
- (b) Zapiši permutacijo $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$.
- (c) Poišči najmanjše število k , za katerega je $\alpha^k = \text{id}$.
- (d) Poišči najmanjše število k , za katerega je $\beta^k = \text{id}$.

$$(a) \quad \alpha = (1 \ 3 \ 5)(2)(4 \ 8 \ 6 \ 7)^{(*)}, \quad \beta = (1 \ 8)(2 \ 7)(3 \ 6)(4 \ 5)$$

$$(b) \quad \alpha * \beta * \alpha^{-1} = (1 \ 3 \ 5)(4 \ 8 \ 6 \ 7)^{(*)} * (1 \ 8)(2 \ 7)(3 \ 6)(4 \ 5) * \\ * (1 \ 5 \ 3)(4 \ 7 \ 6 \ 8) = \\ = (1 \ 8)(2 \ 6)(3 \ 7)(4 \ 5).$$

(c) red α (red permutacije α) je najmanjše celo št. $k > 0$,
da je $\alpha^k = \text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 8 \\ 1 & 2 & & 8 \end{pmatrix}$.
 α ima ciklično strukturo $[4, 3, 1]$, $k = \text{lcm}(4, 3, 1) = 12$.
 $\uparrow$
dolžine ciklov v zapisu $(*)$

$$\alpha^{12} = \text{id}.$$

$$\beta \text{ ima c.s. } [2, 2, 2, 2], \text{ lcm}(2, 2, 2, 2) = 2 \text{ in } \beta^2 = \text{id}.$$

3. Za $n > 3$ definiramo permutacije $\pi_n \in S_n$ kot produkt ciklov

$$\pi_n = (1 \ 2 \ n)(1 \ 3 \ n) \cdots (1 \ n-1 \ n).$$

(a) Zapiši permutacije π_4, π_5 in π_6 .

(b) Izračunaj $\pi_n(1), \pi_n(n), \pi_n^{-1}(1)$ in $\pi_n^{-1}(n)$.

(c) Določi ciklično strukturo in parnost permutacije π_n .

$$(a) \ \pi_4 = (1 \ 2 \ 4)(1 \ 3 \ 4) = (1 \ 2)(3 \ 4). \quad \dots \text{ c.s. } [2, 2]$$

$$\pi_5 = (1 \ 2 \ 5)(1 \ 3 \ 5)(1 \ 4 \ 5) = (1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 3) \dots \text{ c.s. } [5]$$

$$\pi_6 = (1 \ 2 \ 6)(1 \ 3 \ 6)(1 \ 4 \ 6)(1 \ 5 \ 6) = (1 \ 2 \ 4)(3 \ 5 \ 6) \dots \text{ c.s. } [3, 3]$$

$$(b) \ \pi_n = (1 \ 2 \ n)(1 \ 3 \ n) \dots (1 \ n-2 \ n)(1 \ n-1 \ n)$$

$$\pi_n(1) = 2, \ \pi_n(n) = 3, \ \pi_n^{-1}(1) = n-2, \ \pi_n^{-1}(n) = n-1.$$

$$(\alpha * \beta)^{-1} = \beta^{-1} * \alpha^{-1} \dots \pi_n^{-1} = \underbrace{(1 \ n-1 \ n)^{-1}}_{(1 \ n \ n-1)} \dots \underbrace{(1 \ 2 \ n)^{-1}}_{(1 \ n \ 2)}$$

$$(c) \text{ D.N.: } \bullet n \text{ sod } \dots \text{ c.s. } \pi_n \text{ je } \left[\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right],$$

$$\bullet n \text{ lih } \dots \text{ c.s. } \pi_n \text{ je } [n].$$

Parnost π_n : število transpozicij v zapisu π_n na prod. transpozicij?

$$\forall \pi_n \text{ imamo cikle } (1 \ k \ n) \ (1 < k < n) \\ \underbrace{\hspace{1cm}} \\ (1 \ k)(1 \ n),$$

brej lahko π_n zapisemo kot produkt sode mnogo transpozicij,
natančneje $2(n-2)$ transpozicij ... π_n je soda za vse n .

4. Dane so permutacije

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \text{ in}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_9$$

- (a) Zapiši permutacije η , θ in ξ kot produkte disjunktih ciklov.
 (b) Kateri dve od permutacij η , θ in ξ sta konjugirani? (Permutaciji α in β sta konjugirani, če obstaja permutacija π , da je $\alpha = \pi * \beta * \pi^{-1}$.) $\pi' = \pi^{-1}$.
 (c) Za vsaki dve konjugirani permutaciji poišči ustrezno permutacijo π .

(a) $\eta = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 8)(7\ 9)$, c.s. $[4, 3, 2]$

$\theta = (1\ 5)(2\ 6\ 4)(3\ 7\ 8\ 9)$, c.s. $[4, 3, 2]$

$\xi = (1\ 3\ 5\ 7\ 9)(2\ 4\ 6\ 8)$, c.s. $[5, 4]$ ← to gotovo ni konj. η ali θ

(b) α in β sta konjugirani, če obstaja π' , da je $\beta = \pi' * \alpha * \pi'^{-1}$.

↑ potem imata α in β enaki ciklični strukturi.
 To je že dovolj: enaka c.s. pomeni konjugirane.

η in θ sta konjugirani, saj imata enaki ciklični strukturi.

(c) $\eta = (2\ 4\ 6\ 8)(1\ 3\ 5)(7\ 9)$

$\theta = (3\ 7\ 8\ 9)(2\ 6\ 4)(1\ 5)$
 $(7\ 8\ 9\ 3)$

$\theta = \pi * \eta * \pi^{-1} / * \pi$

$\theta * \pi = \pi * \eta * \pi^{-1} * \pi \dots \theta^{-1} * \theta * \pi = \pi * \eta \dots \pi = \theta^{-1} * \pi * \eta$

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 6 & 7 & 4 & 8 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 6\ 8\ 9\ 5\ 4\ 7)$

Preizkus:

~~$\pi * \eta * \pi^{-1} = (1\ 5\ 3)$~~

Kaj pa $\pi^{-1} * \eta * \pi = (1\ 5)(2\ 6\ 4)(3\ 7\ 8\ 9)$ ✓, torej $\pi^{-1} * \eta * \pi = \theta$.

5. V S_{10} opazujemo permutacije π , za katere velja $\pi^{10} = \pi$.

- Cikli katerih dolžin lahko nastopajo v zapisu permutacije π kot produkt disjunktnih ciklov?
- Pokaži, da imajo vse permutacije π , za katere velja $\pi^{10} = \pi$, vsaj eno fiksno točko.
- Poišči eno tako permutacijo π , ki ima najmanjše možno število fiksnih točk.

$$(a) \quad \pi^{10} = \pi \quad / \quad * \quad \pi^{-1} \quad \dots \quad \pi^{10} * \pi^{-1} = \pi * \pi^{-1} \quad \dots \quad \pi^9 = \text{id}$$

$$\pi^9 = (1)(2)(3) \dots (9)(10)$$

↑

zapisava kot prod. disj. ciklov dolžin 1, 2, 3, ..., 9 ali 10

$$(\text{"cikel dolžine } k")^k = (i_1 i_2 \dots i_k)^k = (i_1)(i_2) \dots (i_k) = \text{id}$$

Pojavijo se lahko cikli dolžin 1, 3 ali 9.

(b) i je fiksna točka π , če $\pi(i) = i$.

Možne c.s. za π so $[9, 1] \leftarrow \left. \begin{array}{l} \text{c.s. z min. št.} \\ \text{fiksnih točk} \end{array} \right\} [3, 3, 3, 1] \leftarrow$

$$[3, 3, 1, 1, 1, 1]$$

$$[3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

$$[1, \dots, 1]$$

Fiksne točke predstavljajo cikli dolž. 1 ... H so v vseh c.s. za π .

(c) S c.s. $[9, 1]$ dobimo $\pi = (\underline{1} \underline{2} \underline{3} \underline{4} \underline{5} \underline{6} \underline{7} \underline{8} \underline{9})(\underline{10})$.