

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [10 točk]

Radi bi določili premico $y = kx + n$, ki se v točkah $x = -1, 0, 1$ najboljše prilega paraboli $y = 3x^2$ po metodi najmanjših kvadratov. Zapišite predoločen sistem in iz njega izpeljite normalni sistem. Rešite normalni sistem in zapišite premico, ki se najboljše prilega dani paraboli.

Rešitev.

Dobimo predoločen sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Normalni sistem je oblike $A^\top A\mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}$ za

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^\top \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Rešitev je $\mathbf{x} = [2 \ 0]^\top$, torej je iskana premica oblike $y = 2$;

Naloga 2 [10 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- a) Izračunajte QR razcep matrike A preko modificiranega Gram-Schmidtovega algoritma.
- b) Preko QR razcepa rešite predoločeni sistem za matriko A in vektor $\mathbf{b}$ po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. a)

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) $Q^\top \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, rešimo $R\mathbf{x} = Q^\top \mathbf{b}$ in dobimo $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Naloga 3 [10 točk]

Naj bodo dani enakomerno izbrani vozli $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, 3$, za ustrezní korak h , ter $a = x_0, b = x_3$.

a) Za integral $\int_a^b f(x)dx$ izpeljite odprto Newton-Cotesovo pravilo na notranjih točkah x_1 in x_2 .

b) Preverite, da je pravilo eksaktno, če je f linearna funkcija, ne pa tudi kvadratična funkcija.

Rešitev. a) Določiti moramo pravilo oblike $A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$.

Zaradi simetrije lahko uganemo, da mora veljati $A_1 = A_2$, hkrati vemo, da velja $A_1 + A_2 = 3h$ (pravilo je eksaktno za konstantne funkcije), torej $A_1 = A_2 = 3h/2$. Če tega ne opazimo, lahko izpeljemo tudi direktno:

$$A_1 = \int_a^b \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} dx = \int_0^3 \frac{(x_0+ht-x_2)}{-h} h dt = \int_0^3 (2-t) h dt = 3h/2 \text{ za novo spremenljivo } x = x_0 + ht$$

$$A_2 = \int_a^b \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} dx = \int_0^3 \frac{(x_0+ht-x_1)}{h} h dt = \int_0^3 (t-1) h dt = 3h/2 \text{ za novo spremenljivo } x = x_0 + ht$$

b) Pravilo je eksaktno za linearne funkcije, saj smo tako določili uteži. Lahko pa tudi preverimo direktno.

$$\int_a^b (x - x_0) = 9h^2/2 = 3h/2((x_1 - x_0) + (x_2 - x_0))$$

Kaj pa za kvadratične?

$$\int_a^b (x - x_0)^2 = 9h^3 \neq 15h^3/2 = 3h/2((x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2)$$