

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [10 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Preko LU razcepa z delnim pivotiranjem izračunajte rešitev linearnega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Rešitev.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$ dobimo

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iz $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dobimo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Naloga 2 [10 točk]

Na strežniku merimo količino pretočenih podatkov d v odvisnosti od časa t . Ob času $t = 0$ je seveda količina pretočenih podatkov enaka 0. Ob času $t = 2$ je količina d enaka 32, ob času $t = 3$ pa $d = 48$. Na koncu meritve ob času $t = 4$ je količina d enaka 56, takrat pa se strežnik tudi zaustavi in je zato takrat hitrost pretočenih podatkov enaka nič.

Zapišite interpolacijske podatke in bazne funkcije za zapis rešitve v Newtonovi obliki. Določite Newtonov interpolacijski polinom, ki opisuje količino pretočenih podatkov v odvisnosti od časa.

Rešitev.

bazne funkcije $1, t, t(t-2), t(t-2)(t-3), t(t-2)(t-3)(t-4)$. Interpolacijske točke: $x = [0 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4]$, interpolacijske vrednosti: $y = [0 \ 32 \ 48 \ 56 \ 0]$, dobimo koeficiente $c = [0, 16, 0, -1, -1/4]$, zato je $p(t) = 16t - t(t-2)(t-3) - 1/4 t(t-2)(t-3)(t-4)$.

Naloga 3 [10 točk]

Radi bi določili funkcijo f , oblike $f(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$, ki se v točkah $x = -\pi/2, 0, \pi/2$ najbolj prilega konstantni funkciji $g(x) = 1$ po metodi najmanjših kvadratov. Zapišite predoločen sistem in iz njega izpeljite normalni sistem. Rešite normalni sistem in zapišite funkcijo f , ki se najbolj prilega dani funkciji g .

Rešitev.

Dobimo predoločen sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ za

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalni sistem je oblike $A^\top A\mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}$ za

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^\top \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Rešitev je $\mathbf{x} = [0 \ 1]^\top$, torej je iskana funkcija f oblike $f(x) = \cos(x)$;

Naloga 4 [10 točk]

Dan je začetni problem

$$y' = \frac{1+2y}{1+x}, \quad x \geq 0, y(0) = 1,$$

s točno rešitvijo $y(x) = 1 + 3/2 \cdot x(x+2)$. Izračunajte približek za $y(1)$ tako, da napravite en korak Runge–Kutta metode, ki je odvisna od parametra $\alpha > 0$ in je podana z Butcherjevo shemo

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1 - 1/\alpha & 1/\alpha \end{array}.$$

Za katere vrednosti α se približek in točna vrednost po absolutni vrednosti razlikujeta za manj kot $1/2$?

Rešitev.

Približek:

$$k_1 = 3$$

$$k_2 = (3 + 6a)/(1 + a)$$

$$y_1 = (7 + 4a)/(1 + a)$$

Razlika:

$$y(1) = 11/2$$

Iz $|y_1 - y(1)| = 1/2$ ločimo 2 primera:

$$y_1 - y(1) = 1/2 \rightarrow a = 1/2$$

$$y_1 - y(1) = -1/2 \rightarrow a = 2$$

Torej $a \in [1/2, 2]$