

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [10 točk]

Podana sta matrika A in vektor $\mathbf{b}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Preko modificiranega Gram-Schmidtovega algoritma izračunajte QR razcep matrike A in rešite predoločen sistem za matriko A in vektor $\mathbf{b}$. Za iskano rešitev $\mathbf{x}$ izračunajte še $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2$.

Rešitev.

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, Q^\top \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2 = 2.$$

Naloga 2 [10 točk]

Hidrološki inštitut želi čim bolj natančno predvideti količino pretočene vode $v(t)$ potoka (v m^3) v odvisnosti od časa t (v minutah). Ob začetnem času je količina pretočene vode enaka 0 m^3 , pretok vode pa je enak $10 \text{ m}^3/\text{min}$. Ob izteku polovice minute in ene minute je pretočenih 100 oz. 300 m^3 vode.

Zapišite interpolacijski polinom v Newtonovi obliki, ki opisuje količino pretočene vode $v(t)$ v odvisnosti od časa t . Izračunajte vrednost polinoma pri $t = 1.5$ in tako napovedajte količino pretočene vode v prihodnosti.

Rešitev. za $t = 0, 0, 1/2, 1$, $v = 0, 10, 100, 300$ so koeficienti:

$$c_i = 0, 10, 380, -180$$

rešitev je polinom $p(t) = 10t + 380t^2 - 180t^2(t - 1/2)$ in $p(1.5) = 465$

Naloga 3 [10 točk]

Iščemo numerični približek za ničlo polinoma

$$p(x) = -x^2 + x + 1$$

na intervalu $[0, 4]$. Pokažite, da ima p ničlo na tem intervalu. Izvedite 3 korake metode bisekcije za začetni interval $[0, 4]$. Koliko korakov bi potrebovali, da bi bila napaka približka zagotovo manjša od 10^{-6} ?

Rešitev.

V krajiščih polinom zamenja predznak, saj $p(0) = 1$ in $p(4) = -11$. Približki so 2, 1, 1.5. Za napako manjšo od 10^{-6} bi potrebovali vsaj $\log(4 \cdot 10^6)/\log(2) \approx 21.9$, torej 22 korakov.

Naloga 4 [10 točk]

Dana je diferencialna enačba drugega reda

$$y'' = \frac{y'}{x}$$

z začetnima pogojevma $y(1/3) = 0$, $y'(1/3) = 1$. Enačbo prevedite na sistem enačb prvega reda ter izračunajte numerični približek za $y_1 \approx y(4/3)$ s korakom $h = 1$ z uporabo modificirane Eulerjeve metode. Izračunajte napako numeričnega približka, če veste, da je točna rešitev $y(x) = 3/2 x^2 - 1/6$.

Rešitev. Z vpeljavo novih spremenljivk $y_1 := y$, $y_2 := y'$ dobimo ODE 1. reda:

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2/x \end{bmatrix}.$$

Z modificirano Eulerjevo metodo dobimo

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Izračunamo še $y(4/3) = 5/2$, torej je napaka kar enaka nič.