

Prve vaje APS2

- ① Dokažite, da je $2n^2 + 7n + 3 = \Theta(n^2)$. $\square$

Poiskati moramo pozitivne konstante n_0 , c_1 in c_2 , tako da za vsak $n \geq n_0$ velja $c_1 n^2 \leq 2n^2 + 7n + 3 \leq c_2 n^2$. Vzemimo $c_1 = 1$, $c_2 = 3$ in $n_0 = 10$:

- Očitno je $2n^2 + 7n + 3 \geq n^2$ za vsak $n \geq 10$.
- Velja tudi $2n^2 + 7n + 3 \leq 3n^2$ za vsak $n \geq 10$, saj velja $n^2 - 7n - 3 \geq 0$ za vsak $n \geq (7 + \sqrt{61})/2$.

Trditev lahko dokažemo tudi z uporabo limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 7n + 3}{n^2} = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = 2$$

- ② Dokažite, da je $n = \omega(\lg^2 n)$. $\square$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg^2 n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{n \ln^2 2} \stackrel{\text{L-Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln n}{n \ln^2 2} \stackrel{\text{L-Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n \ln^2 2} = 0.$$

- ③ Dokažite, da je $\lg n! = \Theta(n \log n)$. $\square$

Uporabimo Stirlingovo aproksimacijo.

$$\lg n! \approx \lg \left(\left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \right) = n(\lg n - \lg e) + \frac{1}{2}(\lg 2\pi + \lg n) = \Theta(n \lg n) = \Theta(n \log n).$$

- ④ Dokažite, da funkcija $2^{\ln n}$ asimptotično leži med funkcijama $\sqrt{n}$ in n . $\square$

Uporabimo identiteto $a = b^{\log_b a}$ oziroma (v našem primeru) $2 = e^{\ln 2}$.

$$2^{\ln n} = (e^{\ln 2})^{\ln n} = e^{\ln n \ln 2} = (e^{\ln n})^{\ln 2} = n^{\ln 2}.$$

Sedaj zlahka pokažemo tako $n^{\ln 2} = o(n)$ ($n^{\ln 2}/n = n^{\ln 2 - 1}$ se približuje 0, saj je zaradi $\ln 2 \approx 0,693 < 1$ eksponent negativen) kot $n^{\ln 2} = \omega(\sqrt{n})$ (pri $\sqrt{n}/n^{\ln 2} = n^{1/2 - \ln 2} = n^{1/2 - \ln 2}$ je eksponent prav tako negativen).

- ⑤ Katera funkcija narašča hitreje: 2^{n^2} ali n^{n^2} ? $\square$

Izvršimo prehod na osnovo n :

$$2^{n^2} = (n^{\log_n 2})^{n^2} = n^{n^2 \log_n 2} = n^{\frac{n^2}{\lg n}}.$$

Ker je $\frac{n^2}{\lg n} = \omega(n)$ ($\frac{n}{n^2/\lg n} = \frac{\lg n}{n}$), prva funkcija narašča hitreje.

- ⑥ Dokažite, da funkcija $n^{\lg n}$ asimptotično narašča strogo hitreje kot funkcija n^k (za poljuben $k > 0$), a strogo počasneje kot k^n (za poljuben $k > 1$). $\square$

Pri obeh dokazih uporabljamo sledečo trditev: če je $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \infty$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) / g(n) = 0$, potem je $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n) - g(n)) = -\infty$. Res je: $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n) - g(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) \left(\frac{f(n)}{g(n)} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-g(n)) = -\infty$.

Sedaj dokažimo, da je $n^{\lg n} = \omega(n^k)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{\lg n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k - \lg n}.$$

Ker je $\lim_{n \rightarrow \infty} \lg n = \infty$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\lg n} = 0$, je po zgornji trditvi $\lim_{n \rightarrow \infty} (k - \lg n) = -\infty$, zato je $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{k - \lg n} = 0$.

Dokažimo še, da je $n^{\lg n} = o(k^n)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\lg n}}{k^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\lg n}}{(n^{\log_n k})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\lg n}}{n^{n \log_n k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\lg n - n \log_n k}.$$

Ker funkcija $\lg n$ narašča počasneje kot $n \log_n k \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n \log_n k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln 2} : \frac{n \ln k}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{n \ln 2 \ln k} \quad \begin{array}{c} = \\ \uparrow \\ \text{dvakrat L'Hôpital} \end{array} \quad 0$$

$\dots$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lg n - n \log_n k) = -\infty$ in od tod $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\lg n - n \log_n k} = 0$.

⑦ Kolikokrat se izpiše niz **Dober dan**?

```
void f(int n) {
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        for (int j = 1; j <= i; j++) {
            for (int k = 1; k <= j; k++) {
                printf("Dober dan!\n");
            }
        }
    }
}
```

□

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j 1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (i^2 + i) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \right) \\ &= \frac{1}{12} (n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

⑧ Ocenite časovno zahtevnost sledeče C-jevske funkcije:

```

void f(int n) {
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        int j = i;
        while (j > 0) {
            j /= 2;
            printf("Dober dan!\n");
        }
    }
}

```

V i -tem obhodu zunanje zanke se bo telo notranje zanke izvršilo $(\lfloor \lg i \rfloor + 1)$ -krat. Če predpostavimo, da enkratni obhod notranje zanke traja c enot časa, dobimo

$$T(n) = \sum_{i=1}^n c(\lfloor \lg i \rfloor + 1) = cn + c \sum_{i=1}^n \lfloor \lg i \rfloor.$$

Vsoto $\sum_{i=1}^n \lfloor \lg i \rfloor$ lahko navzgor omejimo s $\sum_{i=1}^n \lg i = \lg(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) = \lg n! = \Theta(n \log n)$, navzdol pa s $\sum_{i=1}^n (\lg i - 1) = \lg n! - n = \Theta(n \log n)$. V vsakem primeru imamo torej $T(n) = \Theta(n \log n)$. Režijski stroški zunanje zanke ($\Theta(n)$) tega rezultata ne spremenijo.