Algoritmi in podatkovne strukture 2

Sprehodi po grafih

Luka Fürst

Graf

- $G = (V, E)$
  - uporabljali bomo tudi $G.V$ in $G.E$ (Cormen *et al.*)
- $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$: množica vozlišč
- $E \subseteq V \times V$: množica povezav
- Omejimo se na enostavne grafe
  - brez zank in vzporednih povezav
- Graf je lahko usmerjen ali neusmerjen
- V tem poglavju so grafi neuteženi

Predstavitev grafa

- Seznam sosednosti
  - tabela n tabel
  - $Adj[v] = [v_1, \ldots, v_k] \iff$ sosedje v so $v_1, \ldots, v_k$
  - najboljša predstavitev za večino algoritmov
- Matrika sosednosti
  - dvojiška matrika $n \times n$
  - $A[u, v] = 1 \iff (u, v) \in E$
  - učinkovita za preverjanje obstoja povezave med podanima vozliščema

Iskanje v širino (BFS)

- Pričnemo v izbranem vozlišču v_0 in preiskujemo vozlišča po naraščajočih razdaljah od v_0
- Vzdržujemo vrsto nazadnje odkritih vozlišč
- Vrsta na začetku vsebuje vozlišče v_0
- V vsaki iteraciji odvzamemo vozlišče iz vrste in vanjo dodamo vse še neodkrite sosede
- $v.obiskano$
  - false na začetku
  - true, ko vozlišče obiščemo
- $v.predhodnik$
  - predhodnik vozlišča v na poti od v_0 do v
- BFS za vsako vozlišče v odkrije najkrajšo pot of v_0 do v

Iskanje v širino (BFS)

```
function BFS(v_0)
    Q ← Inicializiraj-vrsto()
    Dodaj-v-vrsto(Q, v_0)
    v_0.obiskano ← true
    while ¬Je-vrsta-prazna(Q) do
        u ← Odstrani-iz-vrste(Q)
        Print(u)
        for all v ∈ Adj[u] do
            if ¬v.obiskano then
                v.predhodnik ← u
                v.obiskano ← true
                Dodaj-v-vrsto(Q, v)
```

Iskanje v globino (DFS): začetna različica

- DFS v izbranem vozlišču u poženemo tako, da
  - označimo vozlišče u kot obiskano
  - poženemo DFS iz vsakega od neobiskanih sosedov vozlišča u

```
function DFS1(u)
    u.obiskano ← true
    for all v ∈ Adj[u] do
        if ¬v.obiskano then
            v.predhodnik ← u
            DFS1(v)
```

Prva nadgradnja: označevanje vozlišč

- Na začetku so vsa vozlišča bela
- Ko vozlišče obiščemo, postane sivo
- Ko za neko vozlišče obdelamo vse njegove sosede, postane črno

function DFS1(u)
    $u.barva \leftarrow$ siva
    for all $v \in Adj[u]$ **do**
        if $v.barva =$ bela **then**
            $v.predhodnik \leftarrow u$
            DFS1(v)
    $u.barva \leftarrow$ črna

Druga nadgradnja: čas odkritja in čas zaključka

- »Čas« je preprosto globalen števec, inicializiran na 0
- $v.d$: trenutek, ko vozlišče v postane sivo (čas odkritja)
- $v.f$: trenutek, ko vozlišče v postane črno (čas zaključka)

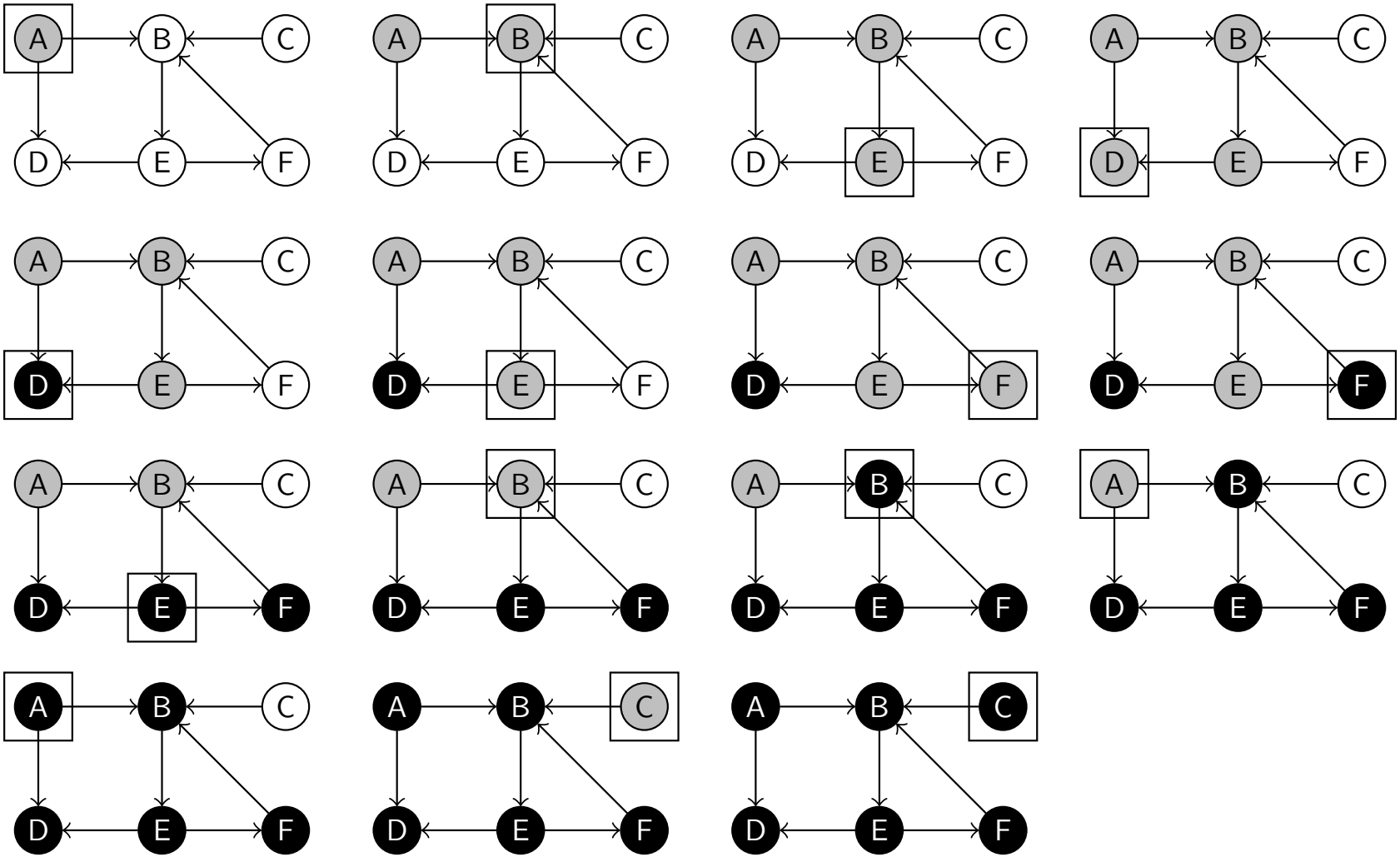
function DFS1(u)
    $čas \leftarrow čas + 1$
    $u.d \leftarrow čas$
    $u.barva \leftarrow$ siva
    for all $v \in Adj[u]$ **do**
        if $v.barva =$ bela **then**
            $v.predhodnik \leftarrow u$
            DFS1(v)
    $u.barva \leftarrow$ črna
    $čas \leftarrow čas + 1$
    $u.f \leftarrow čas$

Tretja nadgradnja

- Pri povezanem neusmerjenem grafu bo funkcija $\mathrm{DFS1}$ odkrila vsa vozlišča
- Pri usmerjenih ali nepovezanih grafih se to (morda) ne bo zgodilo
- $\mathrm{DFS1}$ zato poganjamo, dokler obstajajo neobiskana vozlišča

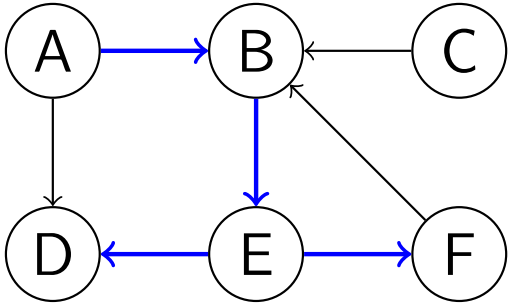
function $\mathrm{DFS}(G)$
    for all $u \in G.V$ **do**
        $u.barva \leftarrow \mathrm{bela}$
    for all $u \in G.V$ **do**
        if $u.barva = \mathrm{bela}$ **then**
            $\mathrm{DFS1}(u)$

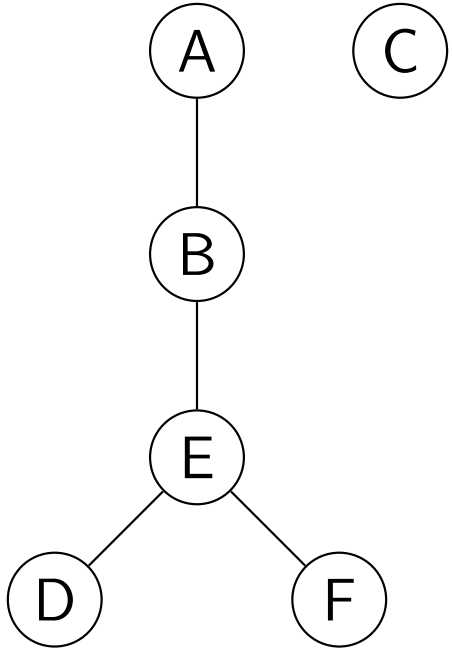
Primer



DFS-gozd

- množica dreves, določena z relacijo predhodnik
- $V = G.V$
- $E = \{(u, v) \mid u = v.predhodnik\}$

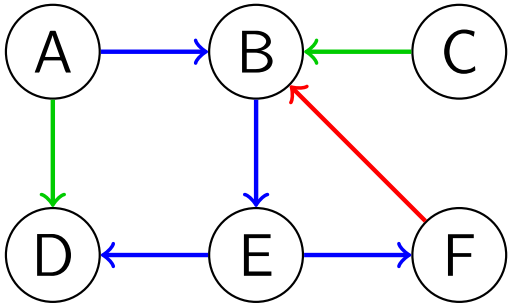




Klasifikacija povezav

- Drevesne povezave
  - povezave, ki tvorijo drevesa v DFS-gozdu
  - sivo vozlišče $\rightarrow$ belo vozlišče
- Povratne povezave
  - povezave med vozliščem in njegovim prednikom v DFS-gozdu
  - sivo vozlišče $\rightarrow$ sivo vozlišče
- Ostale povezave
  - povezave med vozliščem in njegovim potomcem v DFS-gozdu
  - povezave med različnimi drevesi v DFS-gozdu
  - sivo vozlišče $\rightarrow$ črno vozlišče

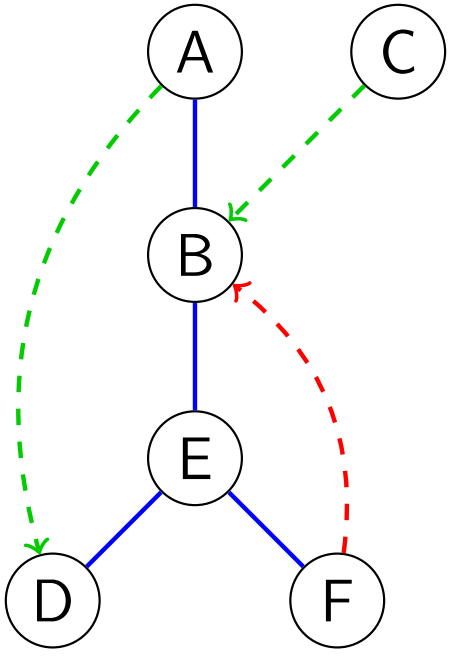
Klasifikacija povezav



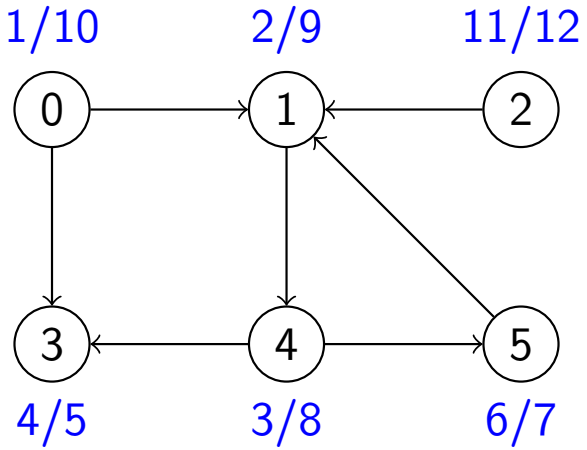
drevesne

povratne

ostale



Čas odkritja in čas zaključka



Lastnost 1

Za vsak par vozlišč u in v velja eno od sledečega:

- $[v.d, v.f] \subset [u.d, u.f]$ in v je potomec u v DFS-gozdu;
- $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ in u je potomec v v DFS-gozdu;
- $[u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$, u in v pa nista v relaciji prednik-potomec v DFS-gozdu.

Dokaz lastnosti 1

- Naj bo $u.d < v.d$ (alternativa je povsem simetrična)
- Možnost 1: $v.d < u.f$
  - u je bilo ob času odkritja v sivo
  - v je zato potomec u v DFS-gozdu
  - DFS najprej rekurzivno preišče vso soseščino v-ja in v počrni, šele potem se vrne na u
  - zato je $v.f < u.f$ in $u.d < v.d < v.f < u.f$
  - $[v.d, v.f] \subset [u.d, u.f]$
- Možnost 2: $v.d > u.f$
  - po definiciji je $u.d < u.f$ in $v.d < v.f$
  - torej je $u.d < u.f < v.d < v.f$
  - $[v.d, v.f] \cap [u.d, u.f] = \emptyset$
  - DFS je odkril v, ko je bilo u že črno, zato v ni potomec u v DFS-gozdu
  - seveda tudi u ni potomec v

Še nekaj lastnosti

Lastnost 2

Vozlišče v je potomec vozlišča u v DFS-gozdu natanko v primeru, če je $u.d < v.d < v.f < u.f$.

Lastnost 3

Vozlišče v je potomec vozlišča u v DFS-gozdu natanko v primeru, če ob času $u.d$ obstaja »bela pot« od u do v (pot, sestavljena iz samih belih vozlišč).

Dokaz lastnosti 3

- v je potomec $u \implies$ obstaja bela pot od u do v
  - za vse potomce vozlišča u v DFS-gozdu velja $v.d > u.d$, zato morajo biti ob času odkritja vozlišča u (ko u postane sivo) biti bela
- Obstaja bela pot od u do $v \implies$ v je potomec u
  - recimo, da obstaja »bela pot« $u \rightsquigarrow w \to v$ in da w postane potomec u-ja v DFS-gozdu, v pa nima te sreče
  - velja $u.d < w.d < w.f < u.f$ (lastnost 2)
  - DFS obišče v (in zaključi z njim), preden zaključi z w, zato je tudi $w.d < v.d < v.f < w.f$
  - od tod sledi $u.d < v.d < v.f < u.f$
  - zato je v dejansko potomec u

Še zadnja ...

Lastnost 4

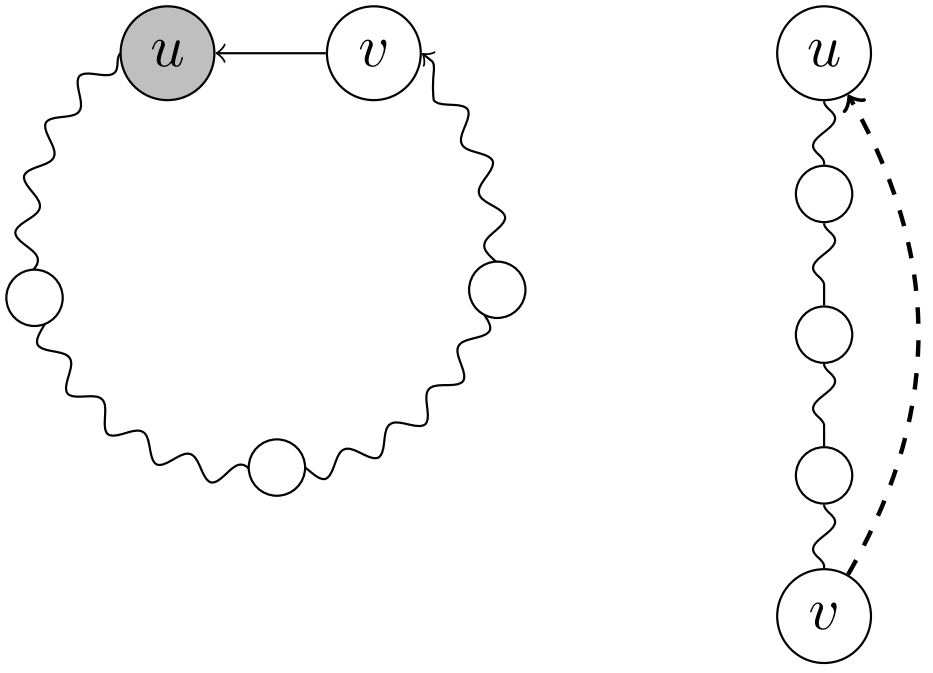
Pri izvajanju DFS na neusmerjenem grafu je vsaka povezava bodisi drevesna bodisi povratna.

- Naj bo (u, v) poljubna povezava v grafu in naj bo $u.d < v.d$
- DFS zaključi z vozliščem v, preden zaključi z vozliščem u
- Zato je vozlišče v potomec vozlišča u v DFS-gozdu
- Če DFS obišče povezavo (u, v) v smeri $u \to v$, je to drevesna povezava (u je tedaj sivo, v pa belo)
- Če DFS obišče povezavo (u, v) v smeri $v \to u$, je to povratna povezava (obe vozlišči sta tedaj sivi)

Detekcija cikla

Trditev

Graf ima cikel natanko v primeru, če pri izvedbi DFS vsaj ena povezava postane povratna.



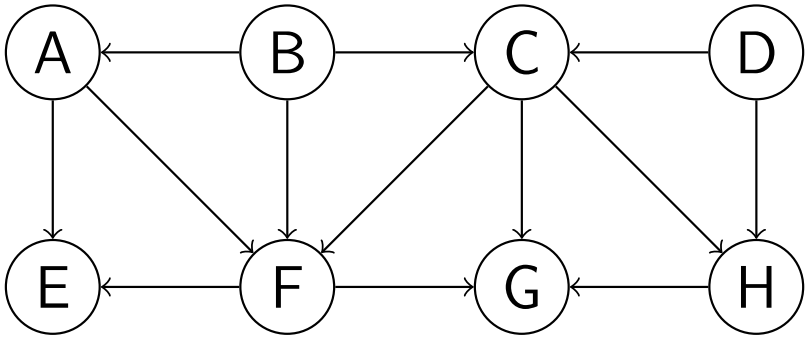
Dokaz trditve

- Graf ima cikel $\implies$ vsaj ena povratna povezava
  - Naj bo $v_1, \ldots, v_k$ cikel v grafu
  - (BŠS) Naj bo v_1 prvo vozlišče v ciklu, ki ga DFS obišče
  - Ko DFS obišče v_1, je v_1 sivo, $v_2, \ldots, v_k$ pa bela
  - Vozlišča $v_2, \ldots, v_k$ po izreku o belih poteh postanejo potomci vozlišča v_1 v DFS-gozdu
  - Ko DFS obišče v_k, bo v_1 še vedno sivo, zato bo $v_k \to v_1$ povratna povezava
- Vsaj ena povratna povezava $\implies$ graf ima cikel
  - Pot po drevesu $u \rightsquigarrow v$ skupaj s povratno povezavo $v \to u$ tvori cikel

Topološko urejanje

- Naj bo G usmerjen acikličen graf
- Topološki vrstni red vozlišč
  - če obstaja pot $u \rightsquigarrow v$, je $u \prec v$
  - če obstaja pot $v \rightsquigarrow u$, je $v \prec u$
  - če ne obstaja niti prva niti druga pot, lahko izberemo bodisi $u \prec v$ bodisi $v \prec u$

Primer

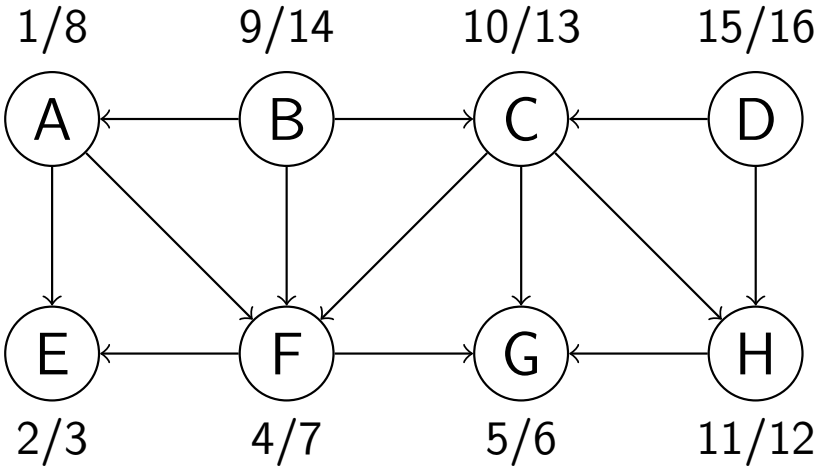


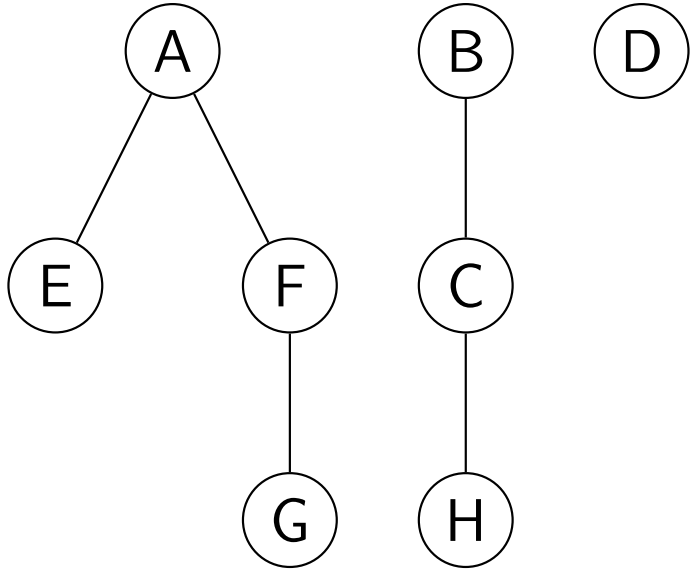
- Topološki vrstni red:

$$D \prec B \prec C \prec H \prec A \prec F \prec G \prec E$$

Algoritem

function TOPOLOŠKO-UREDI(G)
    DFS(G)
    uredi vozlišča po padajočih časih zaključka ($v.f$)





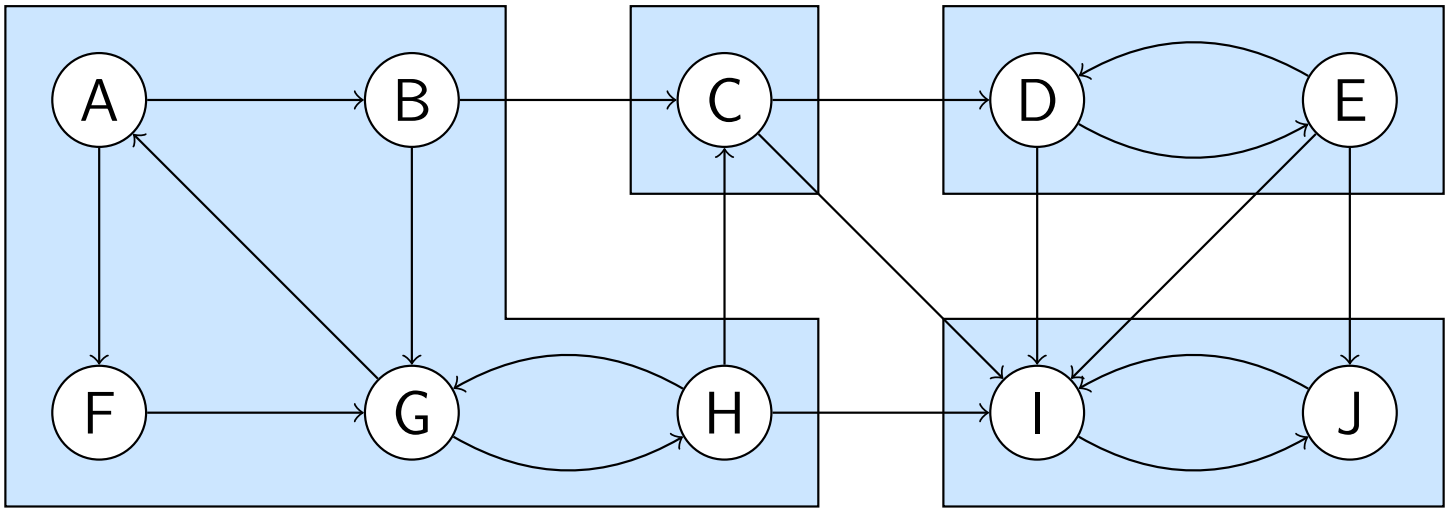
Zakaj deluje?

- Recimo, da imamo povezavo $u \to v$
- Recimo, da je DFS pravkar odkril u
- Vozlišče v je lahko belo ali črno
  - če bi bilo sivo, bi v DFS-gozdu imeli povratno povezavo $v \to u$ in s tem cikel
- Če je v belo, je $u.d < v.d < v.f < u.f$ in potemtakem $v.f < u.f$
- Če je v črno, je $v.f < u.d < u.f$ in potemtakem $v.f < u.f$
- Torej bo v vsakem primeru veljalo $v.f < u.f$

Krepko povezane komponente

- Naj bo G usmerjen graf
- Vozlišči u in v pripadata isti krepko povezani komponenti natanko v primeru, če obstajata poti $u \rightsquigarrow v$ in $v \rightsquigarrow u$
- Cilj problema je poiskati vse krepko povezane komponente v podanem grafu

Primer



Algoritem

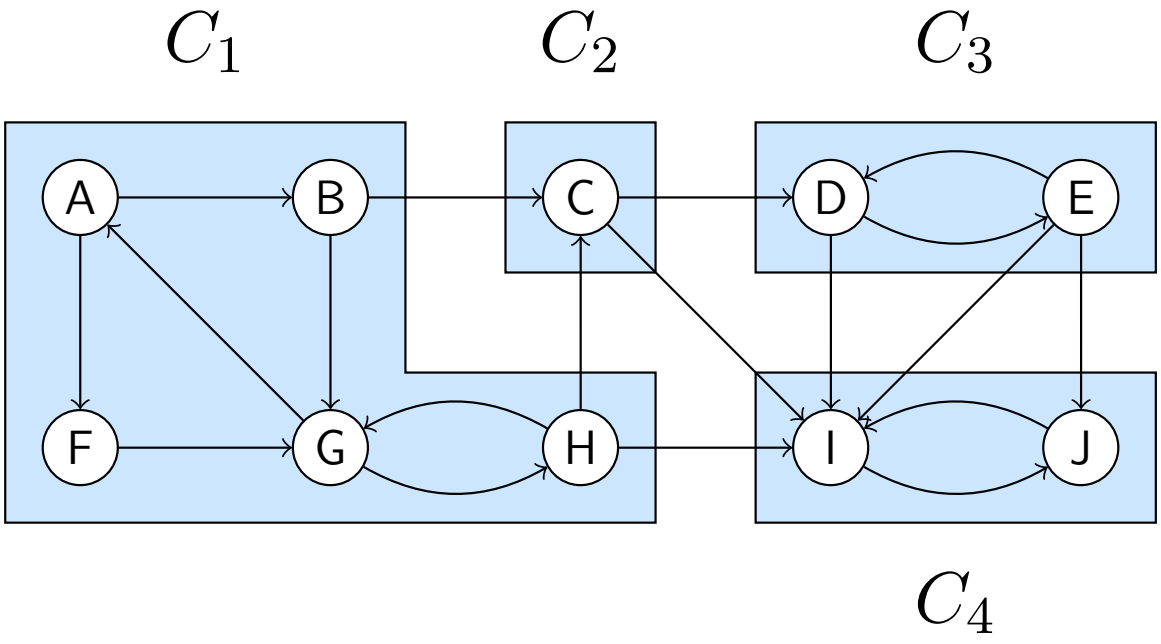
function KREPKO-POVEZANE-KOMPONENTE(G)
    DFS(G)
    $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \leftarrow$ vozlišča, urejena po padajočih $v.f$
    izdelaj G^{T}
    poženi DFS(G^{T}), vendar pa v glavni zanki obravnavaj
        vozlišča po vrstnem redu $v_1, \ldots, v_n$
    drevesa v nastalem DFS-gozdu predstavljajo posamezne
        krepko povezane komponente

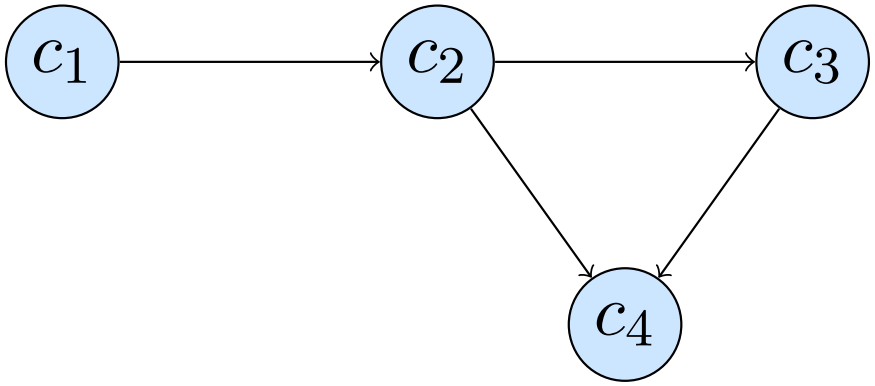
- Graf G^{T} (transponirani graf) je enak grafu G, le da so vse povezave obrnjene v nasprotno smer
  $((u, v) \in G.E \iff (v, u) \in G^{\mathrm{T}}.E)$

Komponentni graf

- Naj bodo C_1, C_2, $\ldots$, C_k krepko povezane komponente grafa G
- Komponentni graf je usmerjen graf $G^{\mathrm{SCC}} = (V^{\mathrm{SCC}}, E^{\mathrm{SCC}})$
- $V^{\mathrm{SCC}} = \{c_1, \ldots, c_k\}$
- $(c_i, c_j) \in E^{\mathrm{SCC}} \iff \exists u \in C_i, v \in C_j : (u, v) \in G$

Komponentni graf



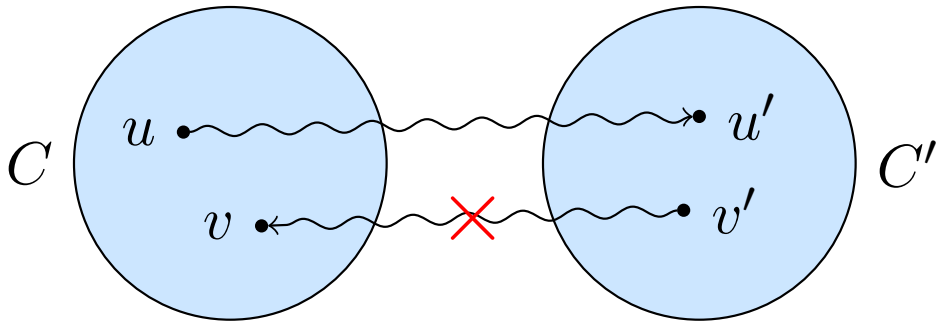


Lastnosti komponentnega grafa

Trditev 1

Komponentni graf je acikličen.

- Naj bosta C in C' različni krepko povezani komponenti
- Naj bo $u, v \in C$ in $u', v' \in C'$
- Recimo, da obstaja pot $u \rightsquigarrow u'$
- Pokazati moramo, da pot $v' \rightsquigarrow v$ ne obstaja
- Res je: če bi pot $v' \rightsquigarrow v$ obstajala, bi obstajala tudi pot $v \rightsquigarrow u \rightsquigarrow u' \rightsquigarrow v'$ in bi v in v' pripadala isti komponenti



Lastnosti komponentnega grafa

- Naj bo $f(C) = \max_{v \in C} v.f$

Trditev 2

Naj bo $u \in C$ in $u' \in C'$ $(C \neq C')$. Če obstaja povezava (u, u'), potem je $f(C') < f(C)$.

- Če DFS obišče u pred u' $(u.d < u'.d)$, bo u sivo in u' belo, zato bo u' potomec u v DFS-gozdu in bo $u.d < u'.d < u'.f < u.f$
- Če DFS obišče u' pred u $(u'.d < u.d)$, bo z u' zaključil, preden bo sploh prispel do u, saj ne obstaja pot $u' \rightsquigarrow u$
- Vnovič bo $u'.f < u.f$

Lastnosti komponentnega grafa

Trditev 3

Naj bo $u \in C$ in $u' \in C'$ $(C \neq C')$. Če je $f(C) > f(C')$, potem G^{T} nima povezave $u \to u'$.

- Če bi G^{T} imel povezavo $u \to u'$, bi G imel povezavo $u' \to u$ in bi po trditvi 2 veljalo $f(C) < f(C')$

Pravilnost delovanja algoritma

Trditev

Vsako DFS-drevo, ki ga tvori algoritem pri preiskovanju grafa G^{T}, predstavlja natanko eno krepko povezano komponento

- Indukcija: vsako od prvih k DFS-dreves, ki jih tvori algoritem, predstavlja po eno krepko povezano komponento
- Naj bo u koren DFS-drevesa $k+1$ in naj u pripada krepko povezani komponenti C
- Vsa ostala vozlišča v C so bela, zato postanejo potomci vozlišča u v DFS-drevesu $k+1$
- Vseh k komponent, ki smo jih že obiskali, ima manjši čas zaključka
- Po trditvi 3 vse povezave iz komponente C vodijo do komponent, ki smo jih že obiskali
- Drevo $k+1$ torej tvori natanko komponento $k+1$

Vprašanje

- V drugi izvedbi poženemo DFS na transponiranem grafu, pri čemer vozlišča obravnavamo po padajočih časih zaključka
- Zakaj ne bi v drugi izvedbi enostavno pognali DFS na originalnem grafu, vozlišča pa bi obravnavali po naraščajočih časih zaključka?