Algoritmi in podatkovne strukture 2

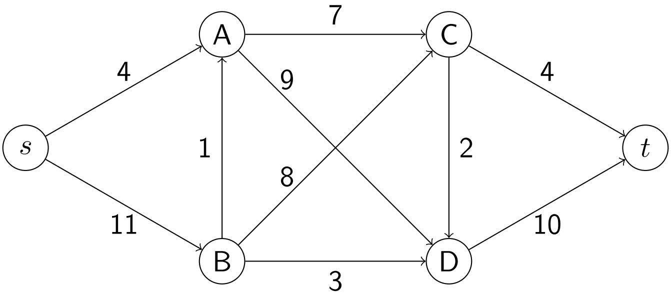
Maksimalni pretoki

Luka Fürst

Izhodišče

- Podan je usmerjen graf, ki predstavlja omrežje
  - vodovodno, električno, transportno ...
- Vozlišče s naj bo izvor omrežja
  - ima samo izstopne povezave
- Vozlišče t naj bo ponor omrežja
  - ima samo vstopne povezave
- Vsaka povezava je opremljena s kapaciteto
  - kapaciteta določa maksimalni pretok po povezavi
- Cilj je maksimizirati pretok po omrežju

Primer



Nekaj pomožnih definicij

- Naj bo $v \in V$ in $S \subseteq V$
- $\mathrm{In}(v) = \{e \in E \mid e = (u, v)$ za nek $u \in V\}$
    - množica povezav, ki vstopajo v vozlišče v
- $\mathrm{Out}(v) = \{e \in E \mid e = (v, w)$ za nek $w \in V\}$
    - množica povezav, ki izstopajo iz vozlišča v
- $\mathrm{In}(S) = \{e \in E \mid e = (u, v)$ za nek $u \in V \setminus S$ in $v \in S\}$
    - množica povezav z začetnim krajiščem v $V \setminus S$ in končnim krajiščem v S
- $\mathrm{Out}(S) = \{e \in E \mid e = (u, v)$ za nek $u \in S$ in $v \in V \setminus S\}$
    - množica povezav z začetnim krajiščem v S in končnim krajiščem v $V \setminus S$

Kapaciteta in pretok povezave

- c_e: kapaciteta povezave e
  - koliko snovi lahko največ teče po e
  - naj bo $c_e \in \mathbb{Z}_0^+$
- $f(e)$: pretok po povezavi e
  - koliko snovi dejansko teče po e
  - f obravnavamo kot funkcijo $E \to \mathbb{R}_0^+$

Omejitve glede pretoka

- Pretok je nenegativen
  - $f(e) \geq 0$
- Pretok je omejen s kapaciteto
  - $f(e) \leq c_e$
- Zakon o ohranitvi pretoka (za $v \in V \setminus \{s, t\}$)
  - toliko toka, kot ga v vozlišče priteče, ga iz vozlišča odteče
  - $\sum_{e \in \mathrm{In}(v)} f(e) = \sum_{e \in \mathrm{Out}(v)} f(e)$
- Označimo $f^{\mathrm{in}}(v) = \sum_{e \in \mathrm{In}(v)} f(e)$ in $f^{\mathrm{out}}(v) = \sum_{e \in \mathrm{Out}(v)} f(e)$
- Veljati mora torej $f^{\mathrm{in}}(v) = f^{\mathrm{out}}(v)$

Pretok po omrežju

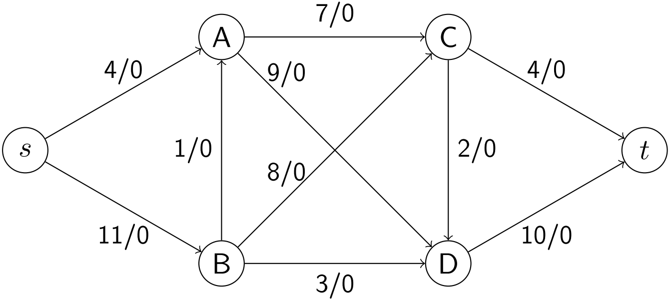
- Količina snovi, ki jo proizvaja izvor ...
- ... in hkrati količina snovi, ki jo požira ponor

$$|f| = f^{\mathrm{out}}(s) = f^{\mathrm{in}}(t)$$

- Cilj problema je maksimizirati $|f|$

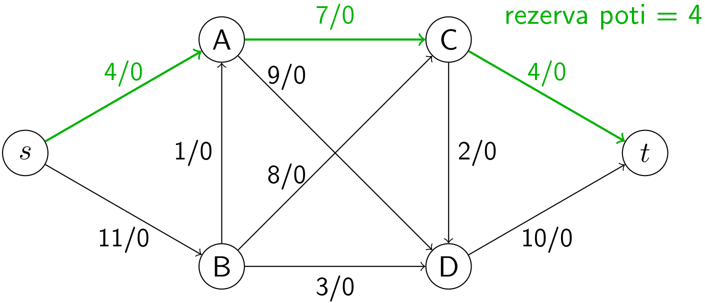
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



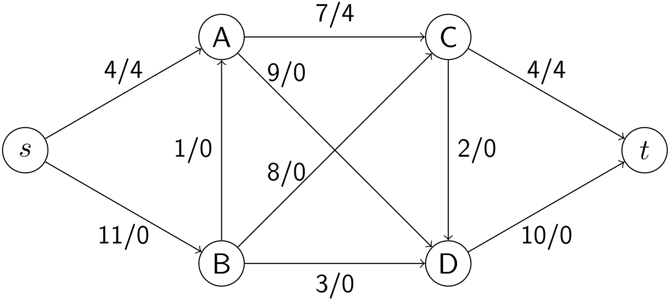
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



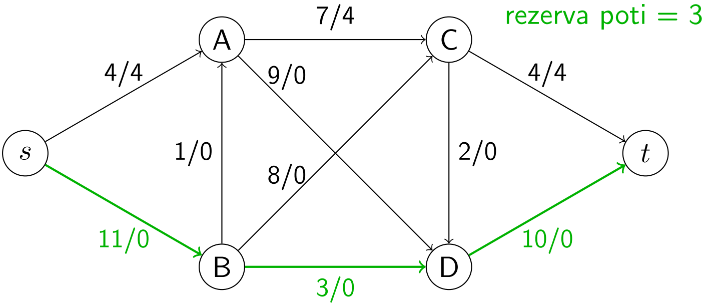
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



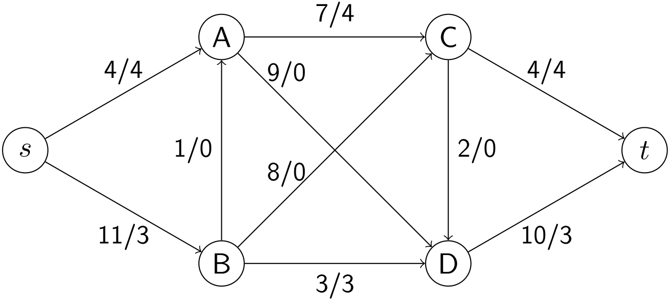
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



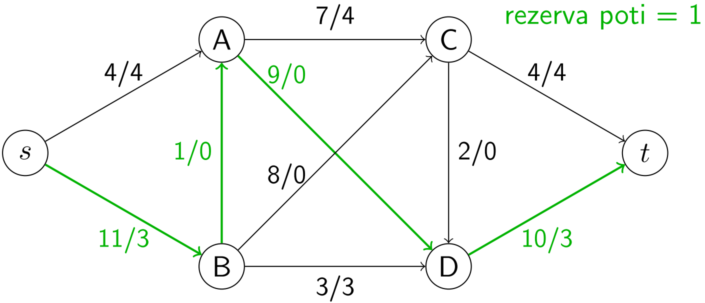
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



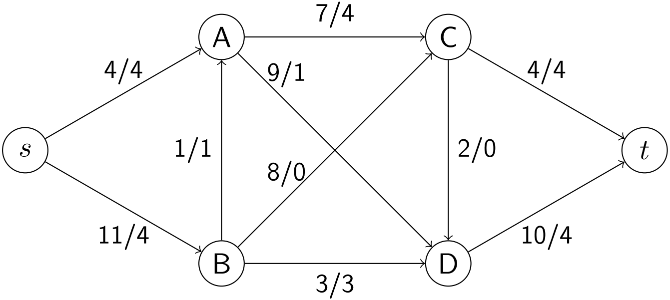
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



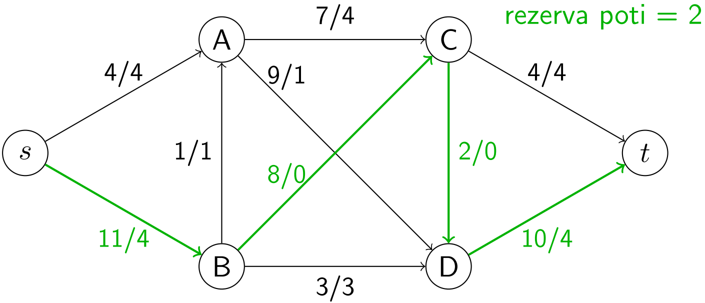
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



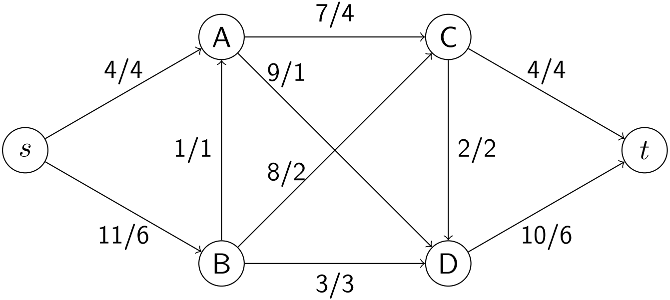
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



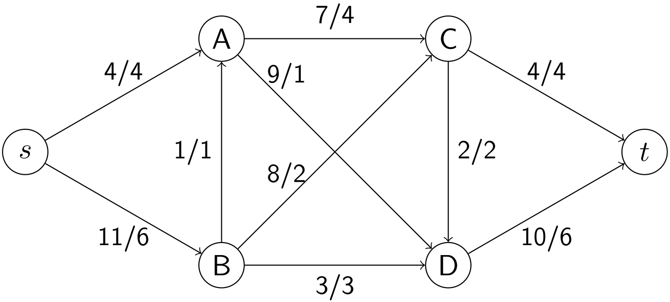
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



Osnovna ideja

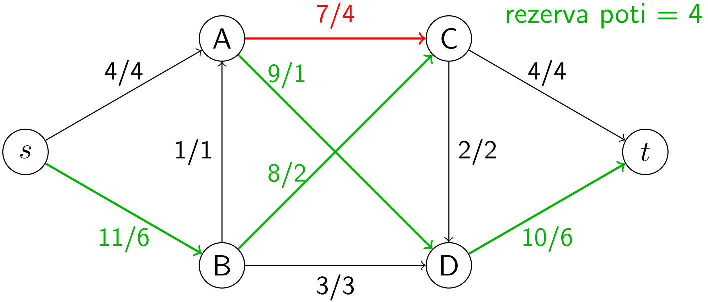
- Smo že končali?



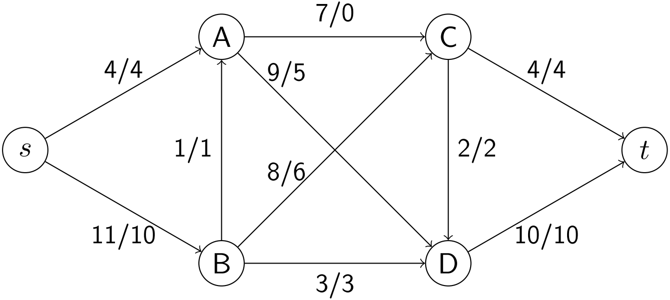
- Na prvi pogled pretoka ne moremo več povečati
- A vendar . . .

Osnovna ideja

- Včasih se nam splača pretok po kateri od povezav zmanjšati, da ga lahko nekje drugje povečamo



Osnovna ideja

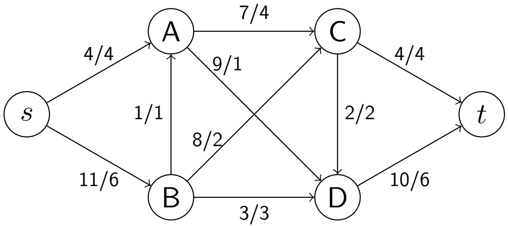


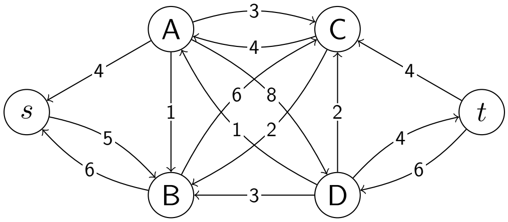
- Sedaj smo pa res končali . . .
- $|f| = f^{\text{out}}(s) = f^{\text{in}}(t) = 14$

Graf rezerv (*residual graph*)

- Naj bo $G = (V, E)$ graf omrežja in $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ pretok
- Graf rezerv (glede na pretok f) je graf $G_f = (V, E_f)$
- Če za $e = (u, v) \in E$ velja $f(e) < c_e$
  - E_f vsebuje povezavo $e_f = (u, v)$ z rezervo $c_e - f(e)$
  - za toliko lahko pretok po povezavi e povečamo
- Če za $e = (u, v) \in E$ velja $f(e) > 0$
  - E_f vsebuje povezavo $e_f = (v, u)$ z rezervo $f(e)$
  - za toliko lahko pretok po povezavi e zmanjšamo

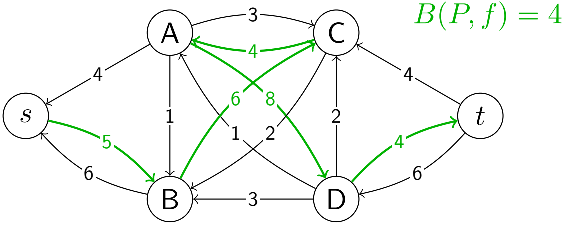
Graf rezerv





Graf rezerv

- Pot od s do t v G_f je nezasičena pot v G
- Naj bo P neka pot od s do t v grafu rezerve
- Naj bodo $r_1, \ldots, r_k$ rezerve povezav na tej poti
- $B(P, f) = \min\{r_1, \ldots, r_k\}$
  - ozko grlo (*bottleneck*)
  - za toliko lahko povečamo pretok po poti P



Povečevanje pretoka po nezasičeni poti

- Naj bo $P^f = \langle e_1^f, \ldots, e_k^f \rangle$ pot od s do t v grafu rezerv
- Naj bo $P = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ pripadajoča pot v originalnem grafu
  - če je $e_i^f = (u_i, v_i)$, velja bodisi $e_i = (u_i, v_i)$ bodisi $e_i = (v_i, u_i)$
- Pretok povezav na poti P v originalnem grafu spremenimo tako:
  - $f'(e_i) = f(e_i) + B(P, f)$, če je e_i usmerjena enako kot e_i^f
  - $f'(e_i) = f(e_i) - B(P, f)$, če je e_i usmerjena nasprotno od e_i^f

Povečevanje pretoka po nezasičeni poti

Trditev 1

Če je f pretok, je f' prav tako pretok.

- Je f' za vse povezave nenegativen?
  - Pretok se zmanjša samo za povezave v nasprotni smeri poti $s - t$
  - Zmanjša se kvečjemu za $\min\{f(e_1), \ldots, f(e_k)\}$, zato bo ostal nenegativen
- Je f' za vse povezave manjši ali enak kapaciteti?
  - Pretok se poveča samo za povezave v smeri poti $s - t$
  - Poveča se kvečjemu za $\min\{c_1 - f(e_1), \ldots, c_k - f(e_k)\}$, zato bo ostal navzgor omejen s kapaciteto
- Ali zakon o ohranitvi pretoka še vedno velja?
  - Da, lahko ga preverimo z enostavno analizo primerov
  - Za vse povezave na poti se pretok poveča oz. zmanjša za isto vrednost

Ford-Fulkersonova metoda

function $\textsc{Maksimalni-pretok}(G)$
  for all $e \in E$ **do**
    $f(e) \leftarrow 0$
  while obstaja pot P^f od s do t v G^f **do**
    $\langle e_1^f, \ldots, e_k^f \rangle \leftarrow$ povezave na P^f
    $\langle r_1, \ldots, r_k \rangle \leftarrow$ rezerve povezav na P^f
    $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle \leftarrow$ pripadajoče povezave v G
    $B \leftarrow \min\{r_1, \ldots, r_k\}$
    for $i \leftarrow 1$ **to** k **do**
      if e_i usmerjena enako kot e_i^f **then**
        $f(e_i) \leftarrow f(e_i) + B$
      else
        $f(e_i) \leftarrow f(e_i) - B$

Ford-Fulkersonova metoda

- Zakaj »metoda«, ne pa »algoritem«?
- Nezasičene poti lahko iščemo na poljuben način
- Različni načini iskanja poti vodijo do različnih algoritmov z različnimi časovnimi zahtevnostmi

Ustavljivost

- Pretok se v vsaki iteraciji glavne zanke poveča vsaj za 1
- Teoretična (ohlapna) zgornja meja pretoka je $C = \sum_{e \in E} c_e$
- To pomeni, da se bo Ford-Fulkersonova metoda prej ali slej iztekla ne glede na to, kako iščemo nezasičene poti
- Če so kapacitete realna števila, obstaja možnost, da se metoda ne ustavi

Časovna zahtevnost

- Največ C iteracij glavne zanke
- Pretok se v vsaki iteraciji poveča vsaj za 1
- Vsaka iteracija traja $O(E)$ časa
- $O(CE)$
- Psevdopolinomska časovna zahtevnost
  - polinomska v odvisnosti od parametrov vhoda
  - eksponentna v odvisnosti od dolžine vhoda
  - $O(CE) = O(2^{b(C)}E)$

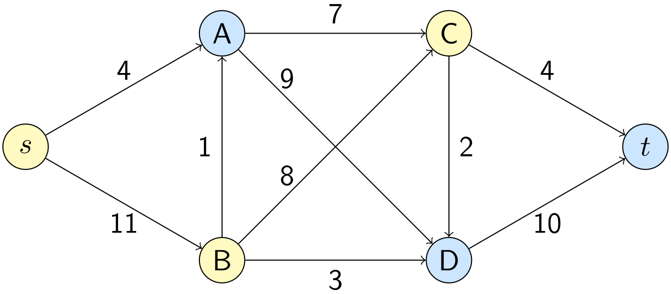
Optimalnost

- Vemo, da Ford-Fulkersonova metoda proizvede veljaven pretok
  - začetni pretok ($f(e) = 0$ za vse $e \in E$) je veljaven
  - operacija zasičevanja poti ohranja veljavnost pretoka
- Vemo, da se Ford-Fulkersonova metoda ustavi
- Pokazati moramo še, da je končni pretok maksimalen

Prerez grafa

- Prerez grafa
  - par (A, B)
  - $A \subseteq V$, $B \subseteq V$
  - $A \cap B = \emptyset$
  - $A \cup B = V$
  - $s \in A$
  - $t \in B$
- Kapaciteta prereza
  - $c(A, B) = \sum_{e \in \mathrm{Out}(A)} c_e$

Primer prereza grafa



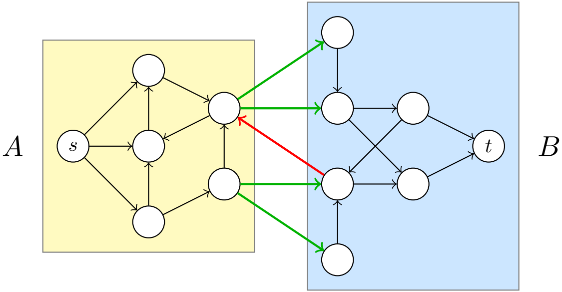
- $A = \{s, \mathsf{B}, \mathsf{C}\}$
- $B = \{t, \mathsf{A}, \mathsf{D}\}$
- $c(A, B) = c_{s\mathsf{A}} + c_{\mathsf{BA}} + c_{\mathsf{BD}} + c_{\mathsf{CD}} + c_{\mathsf{C}t} = 4 + 1 + 3 + 2 + 4 = 14$

Prerez in pretok

Trditev 2

Za poljuben pretok f in poljuben prerez (A, B) velja $|f| = f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A)$.

- $f^{\text{in}}(A) = \sum_{e \in \text{In}(A)} f(e)$
- $f^{\text{out}}(A) = \sum_{e \in \text{Out}(A)} f(e)$



Prerez in pretok

- Po definiciji je
$$|f| = f^{\text{out}}(s)$$
- Ker je $f^{\text{in}}(s) = 0$, lahko zapišemo
$$|f| = f^{\text{out}}(s) - f^{\text{in}}(s)$$
- Ker je $f^{\text{out}}(v) - f^{\text{in}}(v) = 0$ za vse $v \in V \setminus \{s, t\}$:
$$|f| = \sum_{v \in A} (f^{\text{out}}(v) - f^{\text{in}}(v))$$
- V tej vsoti
  - povezave z obema krajiščema v A nastopajo z znakoma $+$ in $-$
  - povezave z izvornim krajiščem v A nastopajo z znakom $+$
  - povezave s ciljnim krajiščem v A nastopajo z znakom $-$

Prerez in pretok

- V vsoti $|f| = \sum_{v \in A}(f^{\mathrm{out}}(v) - f^{\mathrm{in}}(v))$ ostanejo samo povezave na meji med A in B

$$|f| = \sum_{e \in \mathrm{Out}(A)} f(e) - \sum_{e \in \mathrm{In}(A)} f(e)$$

- Torej je

$$|f| = f^{\mathrm{out}}(A) - f^{\mathrm{in}}(A)$$

Prerez in pretok

Trditev 3

Za poljuben pretok f in poljuben prerez (A, B) velja $|f| \leq c(A, B)$.

$$\begin{aligned} |f| &= f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A) \\ &\leq f^{\text{out}}(A) \\ &= \sum_{e \in \text{Out}(A)} f(e) \\ &\leq \sum_{e \in \text{Out}(A)} c_e \\ &= c(A, B) \end{aligned}$$

Prerez in pretok

- Torej je vrednost vsakega pretoka navzgor omejena s kapaciteto vsakega prereza
- Oziroma . . .

Izrek o maksimalnem pretoku in minimalnem prerezu

Vrednost maksimalnega pretoka je enaka kapaciteti minimalnega prereza.

Optimalnost Ford-Fulkersonove metode

Trditev 4

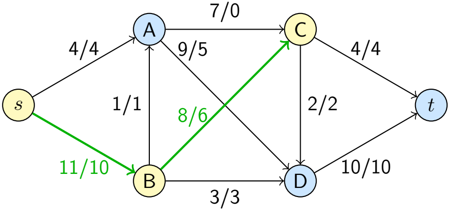
Če je f tak pretok, da v grafu rezerv ni poti od izvora do ponora, potem je vrednost $|f|$ maksimalna.

- Pokazati moramo, da v tem primeru v grafu rezerv obstaja prerez (A^*, B^*) z vrednostjo $|f|$
- Če najdemo takšen prerez, bomo po izreku o maksimalnem pretoku in minimalnem prerezu vedeli, da je vrednost $|f|$ maksimalna, vrednost $c(A^*, B^*)$ pa minimalna

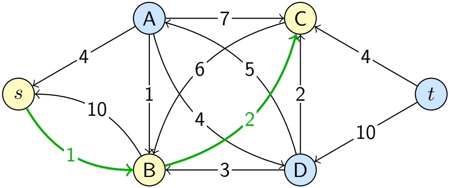
Optimalnost Ford-Fulkersonove metode

- $A^* = \{v \in V \mid$ v grafu rezerv obstaja pot od s do $v\}$
- $B^* = V \setminus A^*$

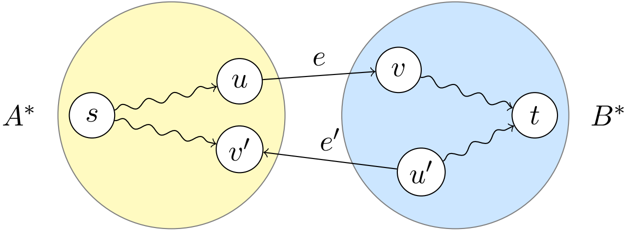
G:



G^f:

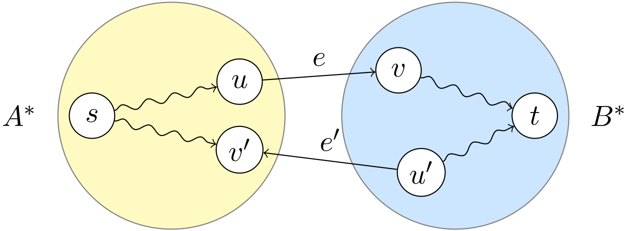


Optimalnost Ford-Fulkersonove metode



- Naj bo $e = (u, v)$ povezava, tako da je $u \in A^*$ in $v \in B^*$
- Trdimo, da je $f(e) = c_e$
- Če bi bilo $f(e) < c_e$, potem bi tudi v pripadal množici A^*, saj v grafu rezerv obstaja pot $s \rightsquigarrow u$, povezava $u \to v$ pa bi bila potem nezasičena

Optimalnost Ford-Fulkersonove metode



- Naj bo $e' = (u', v')$ povezava, tako da je $u' \in B^*$ in $v' \in A^*$
- Trdimo, da je $f(e') = 0$
- Če bi bilo $f(e') > 0$, potem bi tudi u' pripadal množici A^*, saj v grafu rezerv obstaja pot $s \rightsquigarrow v'$, povezava $v' \to u'$ pa bi bila potem nezasičena v obratni smeri (pretok po njej bi lahko zmanjšali)

Optimalnost Ford-Fulkersonove metode

- (A^*, B^*) je prerez
  - $s \in A^*$
  - $t \in B^*$
  - $A^* \cup B^* = V$
- Vse povezave v $\mathrm{Out}(A)$ so zasičene ($f(e) = c_e$)
- Vse povezave v $\mathrm{In}(A)$ so povsem neizkoriščene ($f(e) = 0$)

Optimalnost Ford-Fulkersonove metode

- Po trditvi 2 velja

$$
\begin{aligned}
|f| &= f^{\text{out}}(A^*) - f^{\text{in}}(A^*) \\
&= \sum_{e \in \text{Out}(A^*)} f(e) - \sum_{e \in \text{In}(A^*)} f(e) \\
&= \sum_{e \in \text{Out}(A^*)} c(e) - 0 \\
&= c(A^*, B^*)
\end{aligned}
$$

- Vrednost pretoka je enaka kapaciteti prereza, zato je po izreku o maksimalnem pretoku in minimalnem prerezu maksimalna

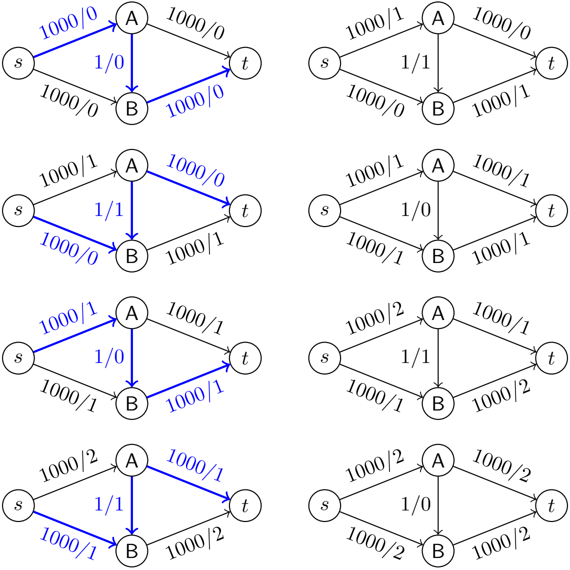
Celoštevilskost pretoka

- Če so kapacitete cela števila, potem obstaja maksimalen pretok, pri katerem so pretoki na vseh povezavah cela števila
- Ford-Fulkersonova metoda nam dá maksimalen pretok
- Začetni pretoki vseh povezav so celoštevilski (enaki 0)
- V vsaki iteraciji povečamo pretok za celoštevilsko vrednost
- Če so kapacitete realna števila, se lahko zgodi, da se Ford-Fulkersonova metoda ne ustavi

Ali se Ford-Fulkersonova metoda lahko »izrodi«?

- Časovna zahtevnost Ford-Fulkersonove metode je $O(CE)$
  - $C = \sum_{e \in E} c_e$ je vsota kapacitet povezav
  - $|E|$ je število povezav
- Toda … ali lahko to zgornjo mejo sploh dosežemo?

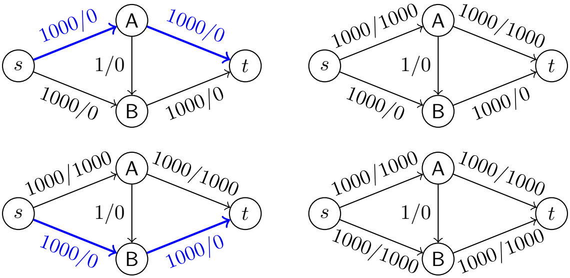
Da, lahko (če smo neprevidni)!



Edmonds-Karpov algoritem

- Izrojenim primerom se lahko izognemo preprosto tako, da nezasičene poti od izvora do ponora (= poti od izvora do ponora v grafu rezerv) iščemo po naraščajočih dolžinah
  - dobimo Edmonds-Karpov algoritem

- Najkrajšo pot najdemo s pomočjo iskanja v širino (BFS)



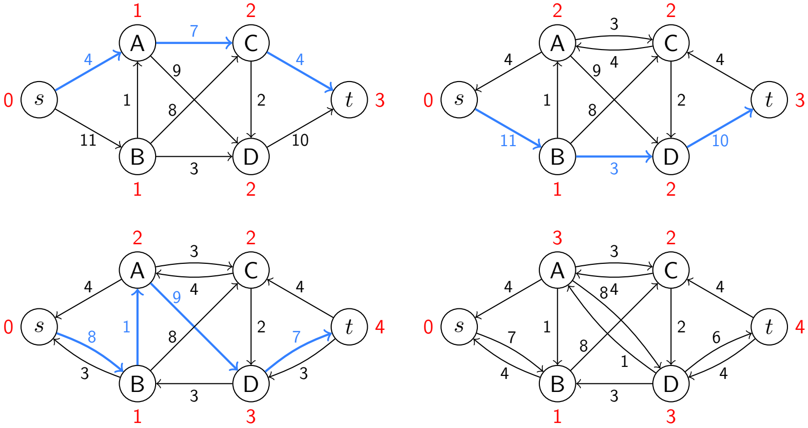
Časovna zahtevnost Edmonds-Karpa

- Pokazali bomo, da Edmonds-Karpov algoritem teče v polinomskem času
- Naj bo $\delta_f(s, v)$ najkrajša pot od izvora s do vozlišča v v grafu rezerv pri pretoku f

Trditev 1

Med izvajanjem Edmonds-Karpovega algoritma lahko za vsako vozlišče v razdalja $\delta_f(s, v)$ kvečjemu narašča (zmanjšati se nikoli ne more).

$\delta_f(s, v)$ v grafih rezerv za tekoči primer

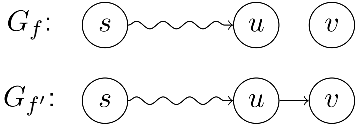


Dokaz trditve 1

- Trdimo, da se razdalja $\delta_f(s,v)$ ne more nikoli zmanjšati
- Dokaz s protislovjem
- Naj bo f pretok v neki iteraciji, f' pa pretok v naslednji iteraciji Edmonds-Karpovega algoritma
- Recimo, da je v vozlišče z najmanjšim $\delta_{f'}(s,v)$, za katero velja $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$
- u naj bo predhodnik v na najkrajši poti od s do v v grafu rezerv $G_{f'}$
- Ker je v najbližje vozlišče z lastnostjo $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$, velja $\delta_f(s,u) \leq \delta_{f'}(s,u)$

Dokaz trditve 1

- Prvič: povezava $u \to v$ obstaja samo v grafu $G_{f'}$
- Če bi obstajala tudi v grafu G_f, se razdalja od s do v ne bi zmanjšala, saj je pot $s \rightsquigarrow u$ obakrat najkrajša
  - če bi povezava $u \to v$ v G_f obstajala, bi veljalo $\delta_f(s,v) \le \delta_f(s,u) + 1 \le \delta_{f'}(s,u) + 1 = \delta_{f'}(s,v)$, kar je v nasprotju s predpostavko $\delta_{f'}(s,v) < \delta_f(s,v)$

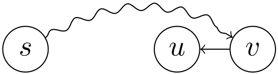


- Kako je mogoče, da povezava $u \to v$ v grafu $G_{f'}$ obstaja, v grafu G_f pa je ni?

Dokaz trditve 1

- Odgovor: pretok na povezavi $u \to v$ se je moral zmanjšati
- To pomeni, da je moral algoritem v zadnji iteraciji (na prehodu s pretoka f na pretok f') najti nezasičeno pot $s \rightsquigarrow v \to u$

G_f:



- Ta nezasičena pot je najkrajša med vsemi (tako pač deluje Edmonds-Karp), zato je tudi njena podpot $s \rightsquigarrow v$ najkrajša pot od s do v v grafu G_f
- Torej je $\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) - 1 \leq \delta_{f'}(s,u) - 1 \leq \delta_{f'}(s,v) - 2$
- Pot od s do v se je torej podaljšala, ne skrajšala (protislovje!)

Časovna zahtevnost Edmonds-Karpa

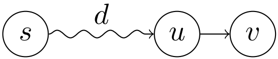
- Pri pretoku f naj bo kritična povezava povezava e na nezasičeni poti P, pri kateri je rezerva enaka $B(P, f)$
- Če zasitimo nezasičeno pot, zasitimo kritično povezavo, ki zato izgine iz grafa rezerv (pojavi se oz. ostane povezava v nasprotni smeri)

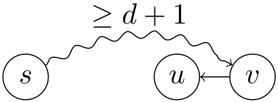
Trditev 2

Vsaka povezava postane kritična kvečjemu $(|V| \,/\, 2)$-krat.

Dokaz trditve 2

- Recimo, da je povezava (u, v) v smeri $u \to v$ pravkar postala kritična
- Naj bo $d = \delta(s, u)$ najkrajša razdalja od s do u v tem trenutku
- Ko pripadajočo pot zasitimo, v grafu rezerv ostane le povezava v smeri $v \to u$
- Ker dolžine poti od izvora do ostalih vozlišč kvečjemu naraščajo, bo $\delta(s, u)$ v trenutku, ko bo povezava (u, v) spet postala kritična (v smeri $v \to u$), enak vsaj $d + 2$





- Ker je $d \leq V$, bo povezava (u, v) (v eni ali drugi smeri) postala kritična kvečjemu $(|V| / 2)$-krat

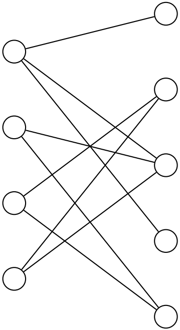
Časovna zahtevnost Edmonds-Karpa

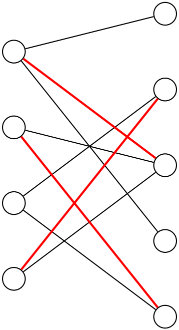
- Vsaka povezava postane kritična kvečjemu $(|V|\,/\,2)$-krat
- Imamo $|E|$ povezav
- Algoritem torej najde $O(VE)$ kritičnih poti
- Vsako zasičevanje traja $O(E)$ časa
- Časovna zahtevnost je potemtakem $O(VE^2)$

Prirejanje v dvodelnih grafih

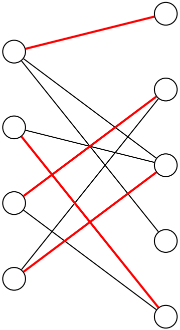
- Dvodelen (bipartiten) graf
  - neusmerjen graf $G = (V, E)$, pri katerem je množico V mogoče razbiti na podmnožici A in B, tako da ima vsaka povezava eno krajišče v A, drugo pa v B
  - graf je dvodelen natanko tedaj, ko nima lihih ciklov
- Prireditev (*matching*) v dvodelnih grafih
  - množica povezav $M \subseteq E$, tako da se vsako vozlišče iz V dotika kvečjemu ene povezave iz M
- Problem maksimalnega prirejanja
  - poišči prireditev z največjim številom povezav
  - praktična uporabnost (npr. A so delavci, B pa naloge)

Primer





prireditev

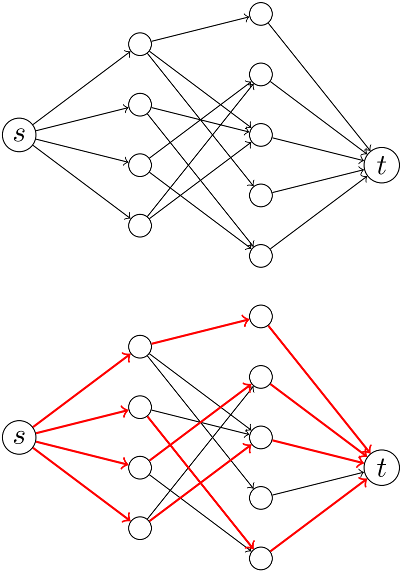


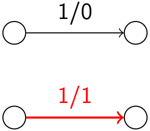
maksimalna
prireditev

Prirejanje in maksimalni pretoki

- Problem maksimalnega prirejanja lahko prevedemo na problem maksimalnega pretoka
- Iz grafa G zgradimo graf G'
- Povezave usmerimo v smeri od A do B
- Dodamo vozlišče s s povezavami (s, v) za $v \in A$
- Dodamo vozlišče t s povezavami (v, t) za $v \in B$
- Kapacitete vseh povezav nastavimo na 1
- Vrednost pretoka = velikost maksimalne prireditve

Primer





Prirejanje in maksimalni pretoki

Trditev 1

Če v grafu G obstaja prireditev M s k povezavami, potem v grafu G' obstaja pretok z vrednostjo k.

- Naj bo $M = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)\}$
- Povezavam $s \to a_i$, $a_i \to b_i$ in $b_i \to t$ za $i \in \{1, \ldots, k\}$ dodelimo pretok 1
- Ostalim povezavam dodelimo pretok 0
- To je veljaven pretok
  - $0 \leq f_e \leq 1$ za vsak $e \in E$
  - $f^{\text{in}}(v) = f^{\text{out}}(v)$ za vsak $v \in V \setminus \{s, t\}$
- Njegova vrednost je k

Prirejanje in maksimalni pretoki

Trditev 2

Če v grafu G' obstaja pretok f z vrednostjo k, potem v grafu G obstaja prireditev s k povezavami.

- Po izreku o celoštevilskem pretoku obstaja maksimalni pretok f' z vrednostjo k, pri katerem imajo vse povezave pretok 0 in 1
- Definirajmo $M = \{(u, v) \mid u \in A,\ v \in B,\ f'((u, v)) = 1\}$
- M vsebuje k povezav
    - osredotočimo se na prerez (S, T) z $S = \{s\} \cup A$
    - $|f'| = f^{\text{out}}(S) - f^{\text{in}}(S) = k$
    - $f^{\text{out}}(S) = k = |M|$, $f^{\text{in}}(S) = 0$

Prirejanje in maksimalni pretoki

- Vsaka povezava v M se dotika natanko enega vozlišča v A
  - če bi se dotikala dveh vozlišč, bi bil kršen zakon o ohranitvi pretoka
- Vsaka povezava v M se dotika natanko enega vozlišča v B
  - če bi se dotikala dveh vozlišč, bi bil kršen zakon o ohranitvi pretoka
- Torej je M prireditev velikosti k

Prirejanje in maksimalni pretoki

- Maksimalni pretok v grafu G' je enak velikosti maksimalne prireditve v grafu G
- Povezave, ki tvorijo maksimalno prireditev v grafu G, so povezave s pretokom 1 v grafu G'