

Algoritmi in podatkovne strukture 2

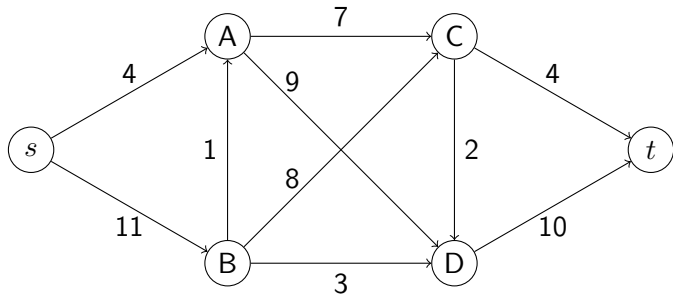
Maksimalni pretoki

Luka Fürst

Izhodišče

- Podan je usmerjen graf, ki predstavlja omrežje
 - vodovodno, električno, transportno ...
- Vozlišče s naj bo izvor omrežja
 - ima samo izstopne povezave
- Vozlišče t naj bo ponor omrežja
 - ima samo vstopne povezave
- Vsaka povezava je opremljena s kapaciteto
 - kapaciteta določa maksimalni pretok po povezavi
- Cilj je maksimizirati pretok po omrežju

Primer



Nekaj pomožnih definicij

- Naj bo $v \in V$ in $S \subseteq V$
- $\text{In}(v) = \{e \in E \mid e = (u, v) \text{ za nek } u \in V\}$
 - množica povezav, ki vstopajo v vozlišče v
- $\text{Out}(v) = \{e \in E \mid e = (v, w) \text{ za nek } w \in V\}$
 - množica povezav, ki izstopajo iz vozlišča v
- $\text{In}(S) = \{e \in E \mid e = (u, v) \text{ za nek } u \in V \setminus S \text{ in } v \in S\}$
 - množica povezav z začetnim krajiščem v $V \setminus S$ in končnim krajiščem v S
- $\text{Out}(S) = \{e \in E \mid e = (u, v) \text{ za nek } u \in S \text{ in } v \in V \setminus S\}$
 - množica povezav z začetnim krajiščem v S in končnim krajiščem v $V \setminus S$

Kapaciteta in pretok povezave

- c_e : kapaciteta povezave e
 - koliko snovi lahko največ teče po e
 - naj bo $c_e \in \mathbb{Z}_0^+$
- $f(e)$: pretok po povezavi e
 - koliko snovi dejansko teče po e
 - f obravnavamo kot funkcijo $E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

Omejitve glede pretoka

- Pretok je nenegativen
 - $f(e) \geq 0$
- Pretok je omejen s kapaciteto
 - $f(e) \leq c_e$
- Zakon o ohranitvi pretoka (za $v \in V \setminus \{s, t\}$)
 - toliko toka, kot ga v vozlišče priteče, ga iz vozlišča odteče
 - $\sum_{e \in \text{In}(v)} f(e) = \sum_{e \in \text{Out}(v)} f(e)$
- Označimo $f^{\text{in}}(v) = \sum_{e \in \text{In}(v)} f(e)$ in $f^{\text{out}}(v) = \sum_{e \in \text{Out}(v)} f(e)$
- Veljati mora torej $f^{\text{in}}(v) = f^{\text{out}}(v)$

Pretok po omrežju

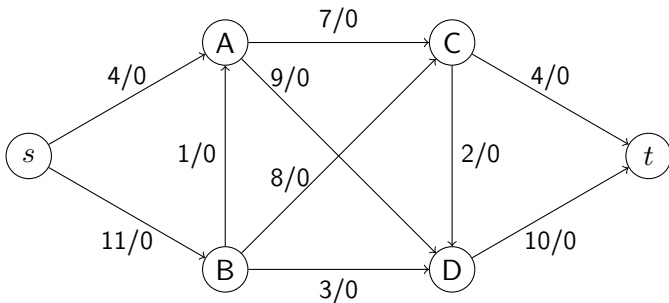
- Količina snovi, ki jo proizvaja izvor ...
- ... in hkrati količina snovi, ki jo požira ponor

$$|f| = f^{\text{out}}(s) = f^{\text{in}}(t)$$

- Cilj problema je maksimizirati $|f|$

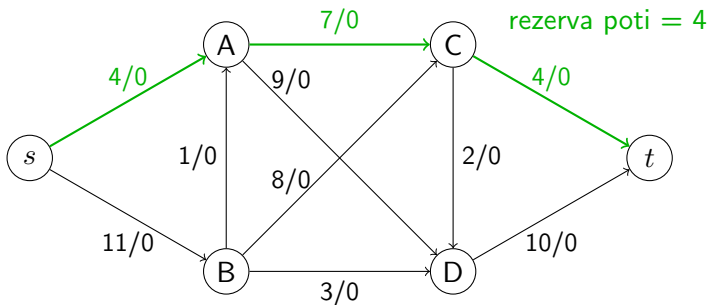
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



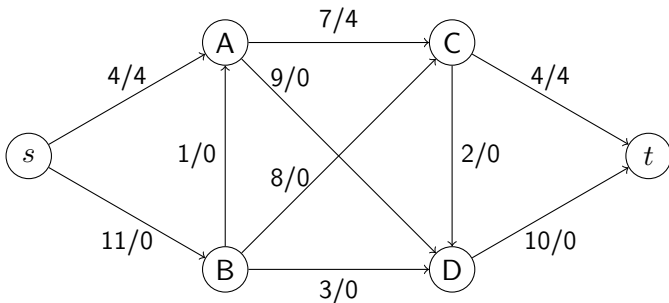
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



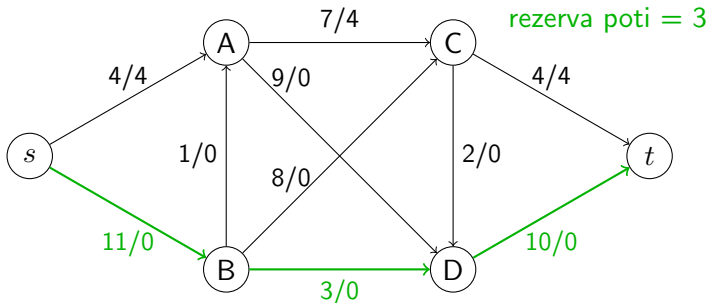
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



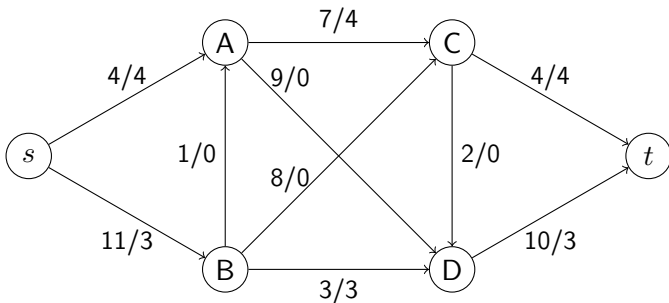
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



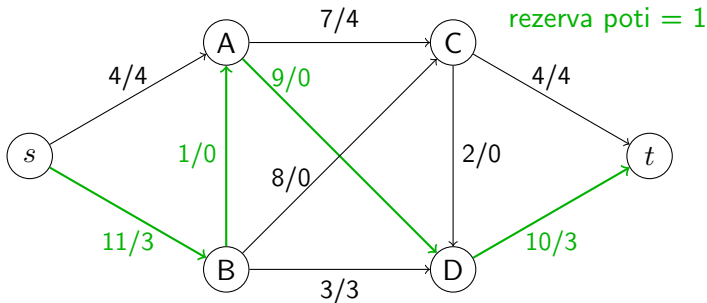
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



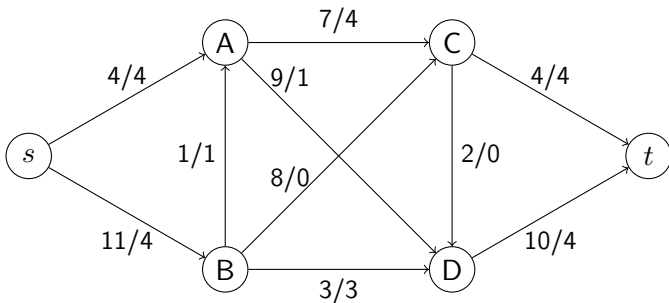
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



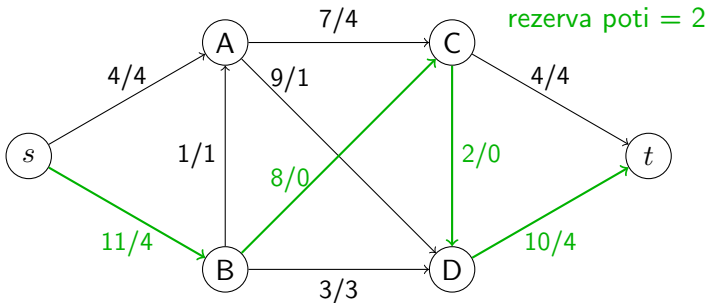
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



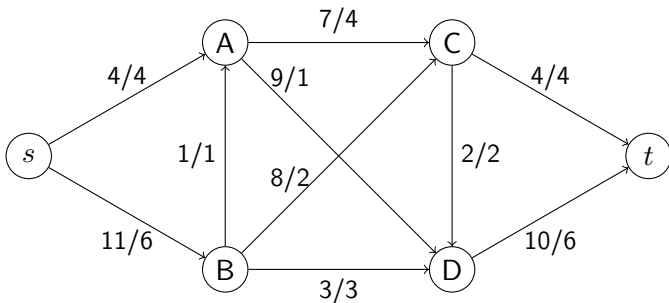
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



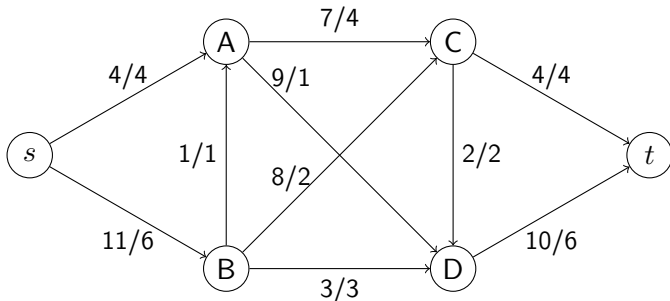
Osnovna ideja

- Poišči nezasičeno pot od izvora do ponora in jo zasiti



Osnovna ideja

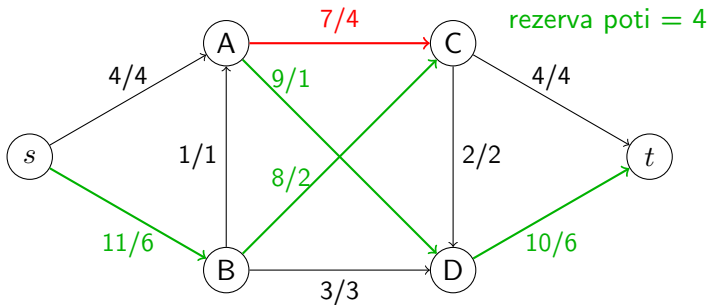
- Smo že končali?



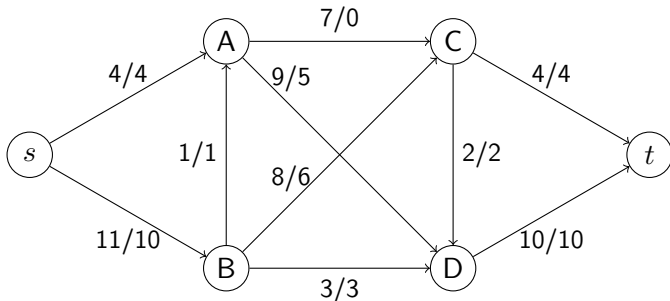
- Na prvi pogled pretoka ne moremo več povečati
- A vendar ...

Osnovna ideja

- Včasih se nam splača pretok po kateri od povezav **zmanjšati**, da ga lahko nekje drugje povečamo



Osnovna ideja

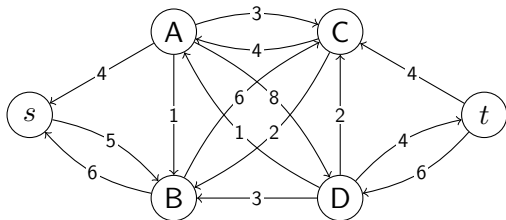
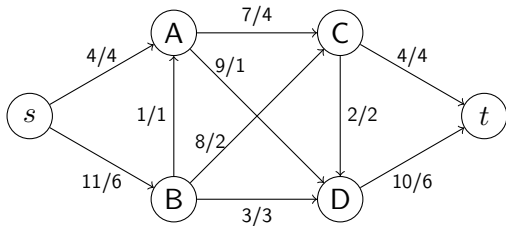


- Sedaj smo pa res končali ...
- $|f| = f^{\text{out}}(s) = f^{\text{in}}(t) = 14$

Graf rezerv (*residual graph*)

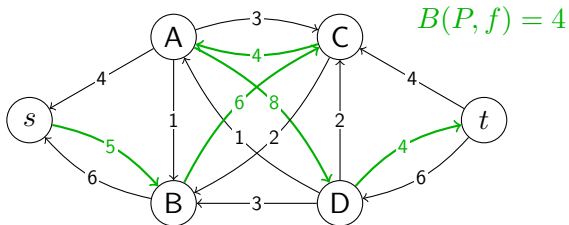
- Naj bo $G = (V, E)$ graf omrežja in $f: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ pretok
- **Graf rezerv** (glede na pretok f) je graf $G_f = (V, E_f)$
- Če za $e = (u, v) \in E$ velja $f(e) < c_e$
 - E_f vsebuje povezavo $e_f = (u, v)$ z **rezervo** $c_e - f(e)$
 - za toliko lahko pretok po povezavi e povečamo
- Če za $e = (u, v) \in E$ velja $f(e) > 0$
 - E_f vsebuje povezavo $e_f = (v, u)$ z **rezervo** $f(e)$
 - za toliko lahko pretok po povezavi e zmanjšamo

Graf rezerv



Graf rezerv

- Pot od s do t v G_f je nezasičena pot v G
- Naj bo P neka pot od s do t v grafu rezerve
- Naj bodo r_1, \dots, r_k rezerve povezav na tej poti
- $B(P, f) = \min\{r_1, \dots, r_k\}$
 - ozko grlo (*bottleneck*)
 - za toliko lahko povečamo pretok po poti P



Povečevanje pretoka po nezasičeni poti

- Naj bo $P^f = \langle e_1^f, \dots, e_k^f \rangle$ pot od s do t v grafu rezerv
- Naj bo $P = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ pripadajoča pot v originalnem grafu
 - če je $e_i^f = (u_i, v_i)$, velja bodisi $e_i = (u_i, v_i)$ bodisi $e_i = (v_i, u_i)$
- Pretok povezav na poti P v originalnem grafu spremenimo tako:
 - $f'(e_i) = f(e_i) + B(P, f)$, če je e_i usmerjena enako kot e_i^f
 - $f'(e_i) = f(e_i) - B(P, f)$, če je e_i usmerjena nasprotno od e_i^f

Povečevanje pretoka po nezasičeni poti

Trditev 1

Če je f pretok, je f' prav tako pretok.

- Je f' za vse povezave nenegativen?
 - Pretok se zmanjša samo za povezave v nasprotni smeri poti $s - t$
 - Zmanjša se kvečjemu za $\min\{f(e_1), \dots, f(e_k)\}$, zato bo ostal nenegativen
- Je f' za vse povezave manjši ali enak kapaciteti?
 - Pretok se zmanjša samo za povezave v smeri poti $s - t$
 - Poveča se kvečjemu za $\min\{c_1 - f(e_1), \dots, c_k - f(e_k)\}$, zato bo ostal navzgor omejen s kapaciteto
- Ali zakon o ohranitvi pretoka še vedno velja?
 - Da, lahko ga preverimo z enostavno analizo primerov
 - Za vse povezave na poti se pretok poveča oz. zmanjša za isto vrednost

Ford-Fulkersonova metoda

```
function MAKSIMALNI-PRETOK( $G$ )  
  for all  $e \in E$  do  
     $f(e) \leftarrow 0$   
  while obstaja pot  $P^f$  od  $s$  do  $t$  v  $G^f$  do  
     $\langle e_1^f, \dots, e_k^f \rangle \leftarrow$  povezave na  $P^f$   
     $\langle r_1, \dots, r_k \rangle \leftarrow$  rezerve povezav na  $P^f$   
     $\langle e_1, \dots, e_k \rangle \leftarrow$  pripadajoče povezave v  $G$   
     $B \leftarrow \min\{r_1, \dots, r_k\}$   
    for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do  
      if  $e_i$  usmerjena enako kot  $e_i^f$  then  
         $f(e_i) \leftarrow f(e_i) + B$   
      else  
         $f(e_i) \leftarrow f(e_i) - B$ 
```

Ford-Fulkersonova metoda

- Zakaj »metoda«, ne pa »algoritem«?
- Nezasičene poti lahko iščemo na poljuben način
- Različni načini iskanja poti vodijo do različnih algoritmov z različnimi časovnimi zahtevnostmi

Ustavljivost

- Pretok se v vsaki iteraciji glavne zanke poveča vsaj za 1
- Teoretična (ohlapna) zgornja meja pretoka je $C = \sum_{e \in E} c_e$
- To pomeni, da se bo Ford-Fulkersonova metoda prej ali slej iztekla ne glede na to, kako iščemo nezasičene poti
- Če so kapacitete realna števila, obstaja možnost, da se metoda ne ustavi

Časovna zahtevnost

- Največ C iteracij glavne zanke
- Pretok se v vsaki iteraciji poveča vsaj za 1
- Vsaka iteracija traja $O(E)$ časa
- $O(CE)$
- Pseudopolinomska časovna zahtevnost
 - polinomska v odvisnosti od parametrov vhoda
 - eksponentna v odvisnosti od dolžine vhoda
 - $O(CE) = O(2^{b(C)} E)$

Optimalnost

- Vemo, da Ford-Fulkersonova metoda proizvede veljaven pretok
 - začetni pretok ($f(e) = 0$ za vse $e \in E$) je veljaven
 - operacija zasičevanja poti ohranja veljavnost pretoka
- Vemo, da se Ford-Fulkersonova metoda ustavi
- Pokazati moramo še, da je končni pretok maksimalen

Prerez grafa

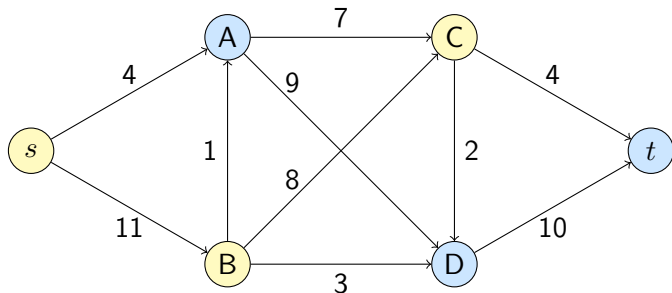
- Prerez grafa

- par (A, B)
- $A \subseteq V, B \subseteq V$
- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cup B = V$
- $s \in A$

- Kapaciteta prereza

- $c(A, B) = \sum_{e \in \text{Out}(A)} c_e$

Primer prereza grafa



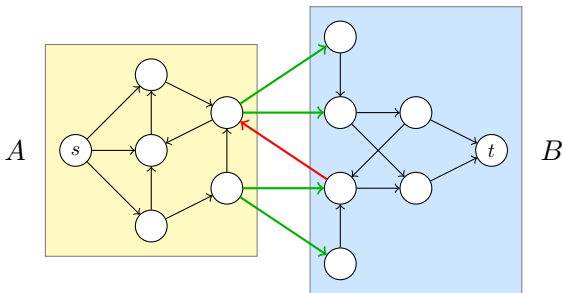
- $A = \{s, B, C\}$
- $B = \{t, A, D\}$
- $c(A, B) = c_{sA} + c_{BA} + c_{BD} + c_{CD} + c_{Ct} = 4 + 1 + 3 + 2 + 4 = 14$

Prerez in pretok

Trditev 2

Za poljuben pretok f in poljuben prerez (A, B) velja
 $|f| = f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A)$.

- $f^{\text{in}}(A) = \sum_{e \in \text{In}(A)} f(e)$
- $f^{\text{out}}(A) = \sum_{e \in \text{Out}(A)} f(e)$



Prerez in pretok

- Po definiciji je

$$|f| = f^{\text{out}}(s)$$

- Ker je $f^{\text{in}}(s) = 0$, lahko zapišemo

$$|f| = f^{\text{out}}(s) - f^{\text{in}}(s)$$

- Ker je $f^{\text{out}}(v) - f^{\text{in}}(v) = 0$ za vse $v \in V \setminus \{s, t\}$:

$$|f| = \sum_{v \in A} (f^{\text{out}}(v) - f^{\text{in}}(v))$$

- V tej vsoti
 - povezave z obema krajiščema v A nastopajo z znakoma + in -
 - povezave z izvornim krajiščem v A nastopajo z znakom +
 - povezave s ciljnim krajiščem v A nastopajo z znakom -

Prerez in pretok

- V vsoti $|f| = \sum_{v \in A} (f^{\text{out}}(v) - f^{\text{in}}(v))$ ostanejo samo povezave na meji med A in B

$$|f| = \sum_{e \in \text{Out}(A)} f(e) - \sum_{e \in \text{In}(A)} f(e)$$

- Torej je

$$|f| = f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A)$$

Prerez in pretok

Trditev 3

Za poljuben pretok f in poljuben prerez (A, B) velja $|f| \leq c(A, B)$.

$$\begin{aligned} |f| &= f^{\text{out}}(A) - f^{\text{in}}(A) \\ &\leq f^{\text{out}}(A) \\ &= \sum_{e \in \text{Out}(A)} f(e) \\ &\leq \sum_{e \in \text{Out}(A)} c_e \\ &= c(A, B) \end{aligned}$$

Prerez in pretok

- Torej je vrednost vsakega pretoka navzgor omejena s kapaciteto vsakega prereza
- Oziroma ...

Izrek o maksimalnem pretoku in minimalnem prerezu

Vrednost maksimalnega pretoka je enaka kapaciteti minimalnega prereza.

Optimalnost Ford-Fulkersonove metode

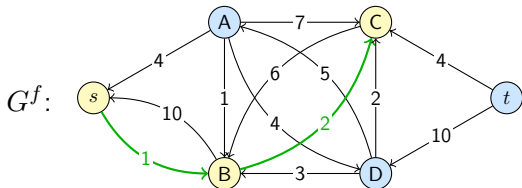
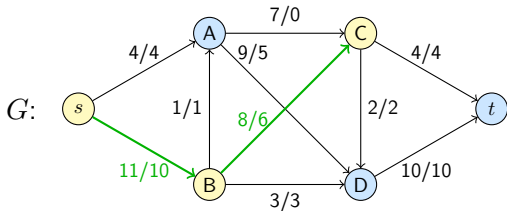
Trditev 4

Če je f tak pretok, da v grafu rezerv ni poti od izvora do ponora, potem je vrednost $|f|$ maksimalna.

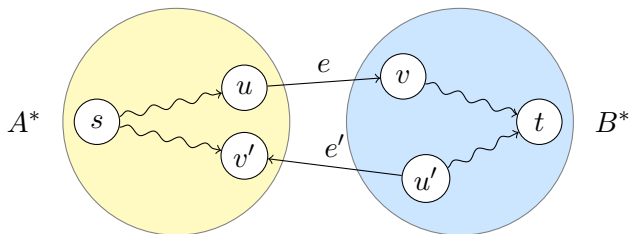
- Pokazati moramo, da v tem primeru v grafu rezerv obstaja prerez (A^*, B^*) z vrednostjo $|f|$
- Če najdemo takšen prerez, bomo po izreku o maksimalnem pretoku in minimalnem prerezu vedeli, da je vrednost $|f|$ maksimalna, vrednost $c(A^*, B^*)$ pa minimalna

Optimalnost Ford-Fulkersonove metode

- $A^* = \{v \in V \mid \text{v grafu rezerv obstaja pot od } s \text{ do } v\}$
- $B^* = V \setminus A^*$

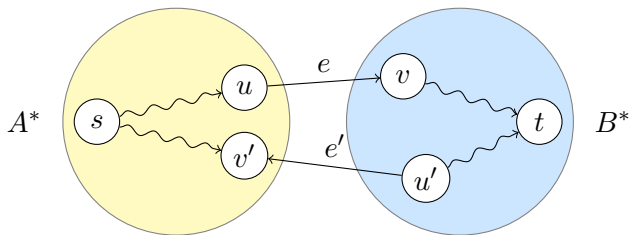


Optimalnost Ford-Fulkersonove metode



- Naj bo $e = (u, v)$ povezava, tako da je $u \in A^*$ in $v \in B^*$
- Trdimo, da je $f(e) = c_e$
- Če bi bilo $f(e) < c_e$, potem bi tudi v pripadal množici A^* , saj v grafu rezerv obstaja pot $s \rightsquigarrow u$, povezava $u \rightarrow v$ pa bi bila potem nezasičena

Optimalnost Ford-Fulkersonove metode



- Naj bo $e' = (u', v')$ povezava, tako da je $u' \in B^*$ in $v' \in A^*$
- Trdimo, da je $f(e') = 0$
- Če bi bilo $f(e') > 0$, potem bi tudi u' pripadal množici A^* , saj v grafu rezerv obstaja pot $s \rightsquigarrow v'$, povezava $v' \rightarrow u'$ pa bi bila potem nezasičena v obratni smeri (pretok po njej bi lahko zmanjšali)

Optimalnost Ford-Fulkersonove metode

- (A^*, B^*) je prerez
 - $s \in A^*$
 - $t \in B^*$
 - $A^* \cup B^* = V$
- Vse povezave v $\text{Out}(A)$ so zasičene ($f(e) = c_e$)
- Vse povezave v $\text{In}(A)$ so povsem neizkoriščene ($f(e) = 0$)

Optimalnost Ford-Fulkersonove metode

- Po trditvi 2 velja

$$\begin{aligned} |f| &= f^{\text{out}}(A^*) - f^{\text{in}}(A^*) \\ &= \sum_{e \in \text{Out}(A^*)} f(e) - \sum_{e \in \text{In}(A^*)} f(e) \\ &= \sum_{e \in \text{Out}(A^*)} c(e) - 0 \\ &= c(A^*, B^*) \end{aligned}$$

- Vrednost pretoka je enak kapaciteti prereza, zato je po izreku o maksimalnem pretoku in minimalnem prerezu maksimalna