

Devete vaje APS2: Maksimalni pretoki

Tokrat si bomo ogledali dva primera uporabe problema maksimalnega pretoka oziroma minimalnega prereza, ki je, kot vemo, enakovreden problem.

Izbira projektov

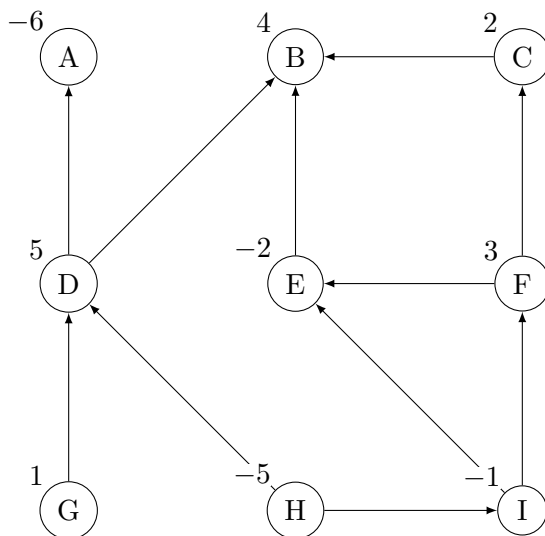
Podana je množica projektov P . Za vsak projekt $p \in P$ je znan njegov predvideni dobiček d_p , ki je lahko tudi negativen. Poiskati moramo množico $A \subseteq P$, tako da bo skupni dobiček projektov v množici A , torej

$$D(A) = \sum_{p \in A} d_p,$$

maksimalen.

Da problem ne bo pretirano enostaven, je podan tudi acikličen usmerjen graf prednostnih odnosov med projekti. Če v grafu obstaja povezava (p, q) , potem izbira projekta p zahteva tudi izbiro projekta q .¹ Primer takega para projektov bi bil $p \equiv$ ustanovi lastno pasje zavetišče in $q \equiv$ kupi ustrezno nepremičnino. Za podani prednostni graf projektov moramo torej poiskati maksimalno *dopustno* množico — množico, za katero so izpolnjene vse prednostne omejitve.

Slika 1 prikazuje primer dobičkov in prednostnega grafa za devet projektov. Optimalna podmnožica projektov je v tem primeru enaka $A = \{B, C, E, F\}$; njen skupni dobiček je enak 7. Množica $\{B, C, F\}$ ima sicer večji dobiček, vendar pa ni dopustna, saj izbira projekta F zahteva tudi izbiro vseh projektov, ki so v prednostnem grafu dosegljivi iz vozlišča F.



Slika 1: Prednostni graf množice projektov.

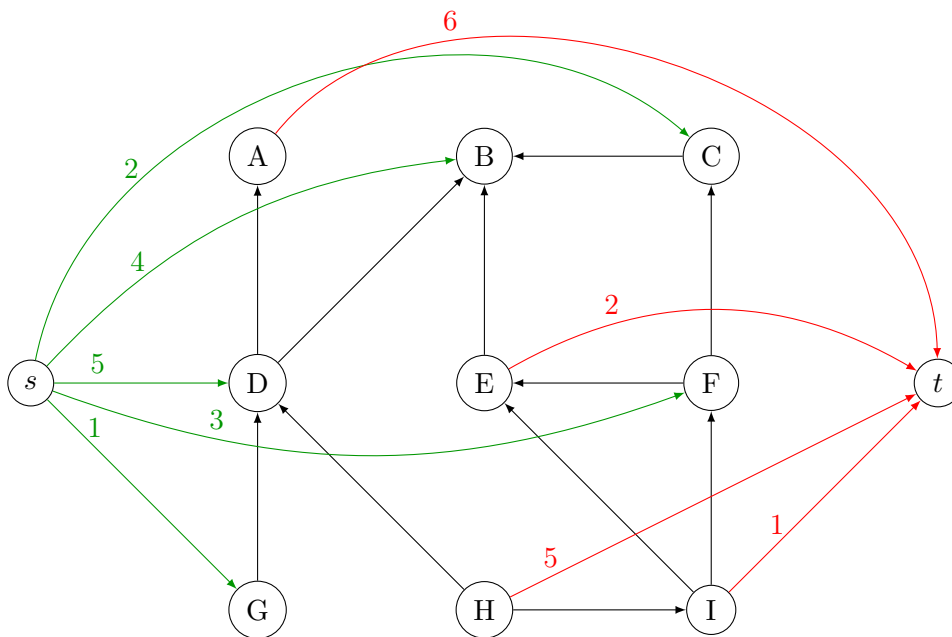
Izkaže se, da lahko problem iskanja optimalne dopustne množice projektov prevedemo na problem minimalnega prereza oziroma maksimalnega pretoka. Omrežje bomo definirali takole:

- Množica vozlišč omrežja je sestavljena iz vozlišč prednostnega grafa ter iz vozlišč s in t , ki služita kot izvor oz. ponor.

¹Bolj smiselna bi bila sicer povezava (q, p) , saj je q predpogoj za p , vendar pa bomo na ta način lažje definirali ustrezno omrežje.

- Množica povezav omrežja je sestavljena iz obstoječih povezav prednostnega grafa in iz novih povezav, ki vključujejo dodani vozlišči s in t . Povezave prednostnega grafa imajo kapaciteto ∞ .
- Za vsako vozlišče (projekt) $p \in P$ z dobičkom $d_p \geq 0$ vzpostavimo povezavo (s, p) s kapaciteto d_p .
- Za vsako vozlišče (projekt) $p \in P$ z dobičkom $d_p < 0$ vzpostavimo povezavo (p, t) s kapaciteto $-d_p$.

Slika 2 prikazuje omrežje za prednostni graf s slike 1.



Slika 2: Omrežje za primer s slike 1. Povezave brez oznak imajo neskončno kapaciteto.

Pokazali bomo, da je kapaciteta minimalnega prereza tako definirane omrežja enaka dobičku optimalne dopustne množice projektov. Ker je kapaciteta minimalnega prereza enaka vrednosti maksimalnega pretoka, lahko problem iskanja optimalne dopustne množice projektov rešimo v polinomskem času s pomočjo Edmonds-Karpovega algoritma.

Za začetek pokažimo sledeče:

Trditev 1. Naj bo $A \subseteq P$ neka dopustna množica projektov, $B = P \setminus A$ pa naj bo množica vseh ostalih projektov. Kapaciteta prereza $(\{s\} \cup A, B \cup \{t\})$ je enaka $C - \sum_{p \in A} d_p$, kjer je

$$C = \sum_{p \in P: d_p \geq 0} d_p$$

vsota dobičkov projektov s pozitivnim dobičkom.

Dokaz. Prerez $(\{s\} \cup A, B \cup \{t\})$ je sestavljen iz povezav (s, v) za $v \in B$ in iz povezav (v, t) za $v \in A$. Vsota kapacitet povezav (s, v) je $K_1 = \sum_{p \in B: d_p \geq 0} d_p$, vsota kapacitet povezav (v, t) pa znaša $K_2 = \sum_{p \in A: d_p < 0} (-d_p)$. Kapaciteta prereza potemtakem znaša

$$K = K_1 + K_2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p \in B: d_p \geq 0} d_p + \sum_{p \in A: d_p < 0} (-d_p) \\
&= \left(\sum_{p \in P: d_p \geq 0} d_p - \sum_{p \in A: d_p \geq 0} d_p \right) + \sum_{p \in A: d_p < 0} (-d_p) \\
&= C - \left(\sum_{p \in A: d_p \geq 0} d_p + \sum_{p \in A: d_p < 0} d_p \right) \\
&= C - \sum_{p \in A} d_p.
\end{aligned}$$

□

Velja tudi tole:

Trditev 2. Če je (A', B') prerez s končno kapaciteto, potem je $A = A' \setminus \{s\}$ dopustna množica projektov.

Dokaz. Če množica A ne bi bila dopustna, bi vsebovala projekt p , ne bi pa vsebovala njegovega logičnega predhodnika (tj. naslednika v prednostnem grafu) q . No, v tem primeru bi bila kapaciteta prereza (A', B') neskončna, saj bi bila povezava (p, q) del tega prereza, kot vemo, pa imajo vse povezave, ki pripadajo prednostnemu grafu, neskončno kapaciteto.

□

Vsakemu prerezu s končno kapaciteto torej pripada dopustna množica projektov (in obratno). Ker je kapaciteta prereza, ki pripada dopustni množici A , enaka $C - \sum_{p \in A} d_p$, dobimo minimalno kapaciteto natanko tedaj, ko je vsota $\sum_{p \in A} d_p$ maksimalna, saj je C konstanta. Pravkar smo torej dokazali tole:

Trditev 3. Kapaciteta minimalnega prereza omrežja je enaka maksimalnemu dobičku dopustne množice projektov.

V našem primeru imamo $C = d_B + d_C + d_D + d_F + d_G = 4 + 2 + 5 + 3 + 1 = 15$. Minimalni prerez omrežja je $(\{s\} \cup A, B \cup \{t\})$, kjer je $A = \{B, C, E, F\}$. Kapaciteta tega prereza je $K = c_{s,D} + c_{s,G} + c_{E,t} = 5 + 1 + 2 = 8$. Množica A je potemtakem optimalna dopustna množica projektov, njen dobiček pa je $C - K = 15 - 8 = 7$.

Ligaški obeti

Imamo ligo S z n ekipami, ki se borijo za naslov prvaka v neki športni disciplini, kjer vsaka zmaga šteje 1 točko, poraz 0 točk, remiji pa ne obstajajo. V danem trenutku ima ekipa $i \in S$ natanko w_i točk (oziroma zmag), do izteka prvenstva pa bosta ekipi $i \in S$ in $j \in S$ odigrali še po g_{ij} medsebojnih tekem (predpostavili bomo, da je $g_{ii} = 0$ in $g_{ij} = g_{ji}$ za vsak $i, j \in S$). Zanima nas, ali ima ekipa $x \in S$ še teoretične možnosti, da se prebije na (lahko tudi deljeno) prvo mesto.

Za začetek lahko takoj izločimo situacijo, ko je točkovna razlika med prvouvrščeno ekipo in ekipo x večja od preostalega števila tekem ekipe x . V tem primeru ekipa x ne bi zmagala niti v primeru, če preostale ekipe med seboj sploh ne bi več igrale. V nadaljevanju se bomo zato ukvarjali le s primeri, ko je $(\max_{i \in S} w_i) - w_x \leq \sum_{j \in S} g_{xj}$.

Oglejmo si primer. Ali lahko v situaciji v tabeli 1 ekipa D še vedno postane prvak (tj. doseže vsaj toliko točk kot vsaka druga ekipa)?

Odgovor je negativen. Ekipa D ima na sporedu še dve tekmi. Če v obeh zmagata, ima 10 točk. Ekipa A bi morala za dosego naslova ekipe D obe svoji bodoči tekmi izgubiti, kar pomeni, da bi tudi ekipi B in C prilezli do 10 točk. Na nesrečo ekipe D pa med seboj

Tabela 1: Prvi primer.

Ekipa	Točke	Preostale tekme			
		A	B	C	D
A	10		1	1	0
B	9			1	1
C	9				1
D	8				

igrata tudi ekipi B in C, zato bi ena od njiju na koncu zbrala 11 točk. Ekipa D torej niti teoretično ne more doseči prvega mesta.

Takšna analiza je lahko precej mukotrpana, k sreči pa obstaja precej elegantnejša utemeljitev, zakaj si ekipa D niti v sanjah ne more obetati prvega mesta. Ekipe A, B in C imajo v danem trenutku skupaj 28 točk, med seboj pa morajo odigrati še 3 tekme. Ko bodo te tekme odigrale, bodo vse skupaj imele 31 točk. Ker je $31/3 > 10$, bo vsaj ena ekipa gotovo imela strogo več kot 10 točk. Ker ekipa D ne more zbrati več kot 10 točk, se lahko zaavoriko obriše pod nosom.

Kot bomo videli v primeru v tabeli 2, pa so razmere včasih nekoliko bolj zapletene. Ali lahko ekipa E še vedno postane zmagovalec prvenstva? Če zmaga v vseh šestih tekmah, ki jih ima pred sabo, doseže 10 točk. Ostale ekipe imajo skupaj $10 + 9 + 7 + 5 = 31$ točk, med seboj pa morajo odigrati še $(2 + 1 + 2) + (1 + 1) + 2 = 9$ tekem. Skupaj lahko potemtakem dosežejo 40 točk, kar bi teoretično pomenilo, da ob idealnem scenariju vsaka ekipa zbere 10 točk — in E je prvak (pa čeprav eden od petih)! Kljub temu pa se to ne more zgoditi: če se osredotočimo na ekipi A in B, vidimo, da imata skupaj 19 točk, čakata pa ju še dve medsebojni tekmi. Ker je $(19 + 2)/2 > 10$, se lahko ekipa E poslovi od naslova.

Tabela 2: Drugi primer.

Ekipa	Točke	Preostale tekme				
		A	B	C	D	E
A	10		2	1	2	2
B	9			1	1	1
C	7				2	1
D	5					2
E	4					

Skratka, velja sledeča opazka:

Trditve 4. Ekipa x ima teoretične možnosti za prvo mesto natanko v primeru, če za vsako množico ekip $T \subseteq S \setminus \{x\}$ velja

$$\frac{\sum_{i \in T} w_i + \sum_{i, j \in T: i < j} g_{ij}}{|T|} \leq m_x,$$

kjer je $m_x = w_x + \sum_{j \in S \setminus \{x\}} g_{xj}$ končno število točk, ki jih lahko doseže ekipa x .

Pogoj iz te trditve seveda lahko preverimo, vendar pa za to potrebujemo eksponentno mnogo časa (v najslabšem primeru preizkusimo vse podmnožice množice S). K sreči pa se izkaže, da si lahko pomagamo z maksimalnimi pretoki.

Usmerjeni graf (omrežje), ki pripada ligi, bomo definirali takole:

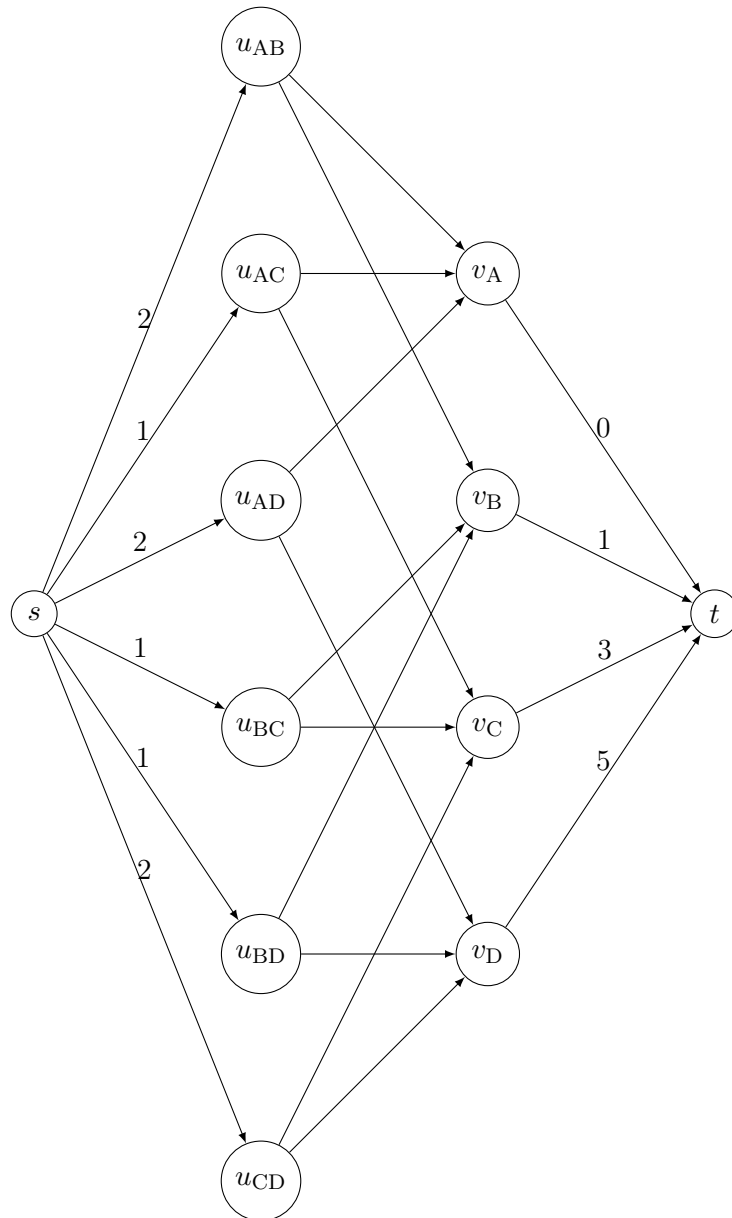
- Posebni vozlišči s in t bosta delovali kot izvor oz. ponor.
- Za vsak par $i, j \in S \setminus \{x\}$ ($i < j$) bomo v graf dodali vozlišče u_{ij} .
- Za vsako ekipo $i \in S \setminus \{x\}$ bomo v graf dodali vozlišče v_i .
- Za vsak par $i, j \in S \setminus \{x\}$ ($i < j$) bomo dodali povezavo (s, u_{ij}) s kapaciteto g_{ij} .
- Za vsak par $i, j \in S \setminus \{x\}$ ($i < j$) bomo dodali povezavi (u_{ij}, v_i) in (u_{ij}, v_j) s kapaciteto ∞ .
- Za vsak $i \in S \setminus \{x\}$ bomo dodali povezavo (v_i, t) s kapaciteto $m_x - w_i$.

Graf za primer v tabeli 2 je prikazan na sliki 3.

Kako lahko razumemo opisano konstrukcijo? Vozlišče s si lahko predstavljamo kot vir točk. V našem primeru bosta ekipi A in B odigrali še 2 tekmi, zato si bosta med seboj razdelili 2 točki. Vozlišče s ti dve točki »pošlje« do vozlišča u_{AB} , to vozlišče pa ju potem preda vozliščema v_A in v_B . Vozlišči v_A in v_B si ti dve točki lahko razdelita na poljuben način (po zakonu o ohranitvi pretokov mora biti vsota pretokov na povezavah (u_{AB}, v_A) in (u_{AB}, v_B) enaka 2), zato kapaciteta na povezavah med vozlišči u in v ni omejena. Točke, ki potujejo po omrežju, na koncu »posrka« vozlišče t .

V našem primeru ekipa E ne more več upati na končno prvo mesto. Razlog za to sta ekipi A in B, ki si bosta razdelili 2 točki, vendar pa imata »rezerve« samo še za 1 točko (spomnimo se: E bi lahko teoretično slavila le v primeru, če bi A in B na koncu obe skupaj zbrali 20 točk, to pa ni mogoče, saj imata na začetku 19 točk, po dveh preostalih igrah pa jih bosta imeli 21). Kako se to odraža v našem grafu? Kot smo povedali, lahko do vozlišč v_A in v_B prispeta 2 enoti (2 točki), vozlišče t pa lahko od njiju sprejme le 1 točko, saj je vsota kapacitet povezav (v_A, t) in (v_B, t) enaka 1. Ekipi A in B bosta torej skupaj zbrali 1 točko preveč, da bi ekipa E še imela teoretične možnosti za doseg naslova.

Ekipa x ima teoretične možnosti za končno prvo mesto natanko v primeru, če se vse točke, ki jih proizvede vozlišče s , porazdelijo po omrežju in na koncu pritečejo v vozlišče t . To se zgodi natanko takrat, ko je pretok po omrežju enak $\sum_{i,j \in S \setminus \{x\}} g_{ij}$, torej vsoti kapacitet povezav iz vozlišča s . Več kot to tako ali tako ne more biti, če je pretok manjši, pa to pomeni, da niso vse možne točke prispele do vozlišča t . V tem primeru za neko množico ekip $T \subseteq S \setminus \{x\}$ velja, da je skupno število njihovih bodočih medsebojnih tekem večje od razlike med vrednostjo $m_x |T|$ in vsoto njihovih trenutnih točk, zato bo vsaj ena od ekip v množici T na koncu zagotovo imela več kot m_x točk.



Slika 3: Graf za primer v tabeli 2. Povezave brez oznak imajo neskončno kapaciteto.