Digitalna vezja
UL, FRI

Vaja 4 Quineova metoda minimizacije

Sosednost in vsebovalniki

- **Sosednost**

Dva konjunktivna logična izraza sta sosedna, če se razlikujeta po natanko eni negaciji:

I. Oba izraza vsebujeta enake vhodne spremnljivke
II. Razlikujeta se po točno eni negaciji

Primer:

Zapiši vse sosede izzaza $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$

- **Vsebovalnik**

Konjunktiven izraz, ki pokrije skupino enic/mintermov

- **Glavni vsebovalnik**

Najkrajši možen konjunktiven izraz, ki pokrije skupino enic/mintermov

Primer:

$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 = \underbrace{\overline{x_1} \cdot x_3}_{\textbf{Glavni vsebovalnik}} \cdot \underbrace{(\overline{x_2} \vee x_2)}_{=1} = \overline{x_1} \cdot x_3$$

Minimalna disjunktivna normalna oblika (MDNO) in Tabelarična Quine-McCluskey metoda minimizacije

- **Minimalna disjunktivna normalna oblika (MDNO)**
  - Najkrajša možna disjunktivna normalna oblika zapisa funkcije
  - Izhajamo in zapisa PDNO in izraz poenostavimo na podlagi sosednosti in potrebnih glavnih vsebovalnikov

- **Tabelarična Quine-McCluskey metoda minimizacije**
  1. Tabela glavnih vsebovalnikov:
     - Tabela z n stolpci (n – št. vhodnih spremenljivk)
     - V stolpec n zapišemo minterme, v stolpec i-1 pa sosedne člene zapisane v stolcu i in njihove glavne vsebovalnike
  2. Tabela potrebnih glavnih vsebovalnikov:
     - V stolpce zapišemo minterme, ki jih moramo pokriti,
     - V vrstice zapišemo glavne vsebovalnike in njihova pokritja mintermov
     - Na podlagi tabele potrebnih glavnih vsebovalnikov določimo najmanjšo množico glavnih vsebovalnikov, ki pokrijejo vse minterme
  3. Zapišemo MDNO v eksplicitni obliki

Minimalna disjunktivna normalna oblika (MDNO) in Tabelarična Quine-McCluskey metoda minimizacije

Primer: Z metodo Quine-McCluskey zapiši MDNO za $f = \vee^3 (1, 2, 3, 6, 7)$

1. Tabela glavnih vsebovalnikov:

3		2		I	
(1)	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$	√	(1,3) $\overline{x_1}x_3$		((2,3), (6,7)) x_2
(2)	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$	√	(2,3) $\overline{x_1}x_2$	√	((2,6), (3,7))
(3)	$\overline{x_1}x_2x_3$	√	(2,6) $x_2\overline{x_3}$	√	
(6)	$x_1x_2\overline{x_3}$	√	(3,7) x_2x_3	√	
(7)	$x_1x_2x_3$	√	(6,7) x_1x_2	√	

2. Tabela pokritij mintermov in določitev potrebnih glavnih vsebovalnikov:

		m_1	m_2	m_3	m_6	m_7
√	$\overline{x_1}x_3$	√		√		
√	x_2		√	√	√	√

3. Zapis MDNO:

$$f_{MDNO}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_3 \vee x_2$$

Minimalna konjunktivna normalna oblika (MKNO)

- **Minimalna konjunktivna normalna oblika (MKNO)**
  - Najkrajša možna konjunktivna normalna oblika zapisa funkcije

  - **Določitev MKNO:**
    - funkcijo negiramo,
    - določimo MDNO negirane funkcije,
    - negiramo MDNO negirane funkcije in dobimo MKNO izhodiščne funkcije

Primer:

Z metodo Quine-McCluskey zapiši MKNO za $f = \vee^3 (1, 2, 3, 6, 7)$

1. Funkcijo negiramo:

$$\bar{f} = \vee^3 (0, 4, 5)$$

2. Določimo MDNO negirane funkcije:

3		2	1
(0)	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ $\surd$	(0,4)	$\overline{x_2}\,\overline{x_3}$	
(4)	$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ $\surd$	(4,5)	$x_1\overline{x_2}$	
(5)	$x_1\overline{x_2}\,x_3$ $\surd$			

Minimalna konjunktivna normalna oblika (MKNO)

		m_0	m_4	m_5
√	$\overline{x_2}\ \overline{x_3}$	√	√	
√	$x_1\overline{x_2}$		√	√

MDNO:

$$\bar{f}_{MDNO}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2}\ \overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}$$

3. Negiramo MDNO negirane funkcije in zapišemo MKNO izhodiščne funkcije:

$$f_{MKNO}(x_1, x_2, x_3) = \bar{\bar{f}}_{MDNO}(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \overline{\overline{x_2}\ \overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}} =$$
$$= (x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2)$$

Minimalna normalna oblika (MNO)

- **Minimalna normalna oblika (MNO)**
  - Najkrajši normalni zapis funkcije – predstavlja krajšo izmed MDNO in MKNO

  - **Določitev MNO:**
    - določimo MDNO in MKNO
    - določimo kompleksnost MDNO in MKNO:
      - **Operatorji** – število porablnenih konjunkcij in disjunkcij
      - **Vhodi** – skupno število vhodov v konjunkcije in disjunkcije
    - MNO je tista, ki ima manjše število operatorjev, če je to število enako, potem je manjša tista, ki ima manj vhodov.

Primer:

Za funkcijo $f = \vee^3 (1, 2, 3, 6, 7)$ določi MNO!

	$f_{MDNO}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_3 \vee x_2$		$f_{MKNO}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2)$
# operatorjev	2	<	3
# vhodov	4		6

$$f_{MNO}(x_1, x_2, x_3) = f_{MDNO}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_3 \vee x_2$$

Naloga

Podana je funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4 (0, 1, 4, 5, 11, 15)$.

Zapišite:

1. PDNO v eksplicitni obliki
2. PKNO v skrajšani obliki (pretvorba z uporabo relacij za dualne terme)
3. PKNO v eksplicitni obliki
4. MDNO z uporabo metode Quine-McCluskey
5. MKNO z uporabo metode Quine-McCluskey
6. MNO
7. MNO realizirajte v Logisimu in na protoboardu

Naloga: Rešitev

Podana je funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4 (0, 1, 4, 5, 11, 15)$.

Zapišite:

1. $f_{PDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_2 x_3 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3 x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4$
2. $f_{PKNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \&^4(2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14)$
3. $f_{PKNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)$
   $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})$
   $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})$
   $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)$
4. $f_{MDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_3} \vee x_1 x_3 x_4$
5. $f_{MKNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_4)$
6. $f_{MNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_{MDNO}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_3} \vee x_1 x_3 x_4$