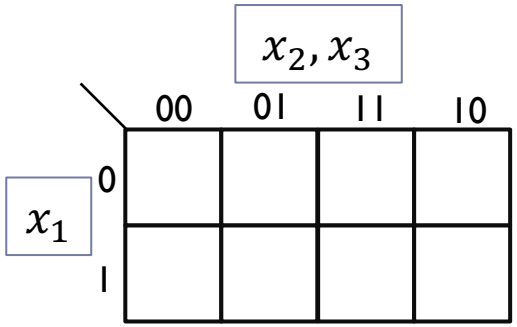
Digitalna vezja
UL, FRI

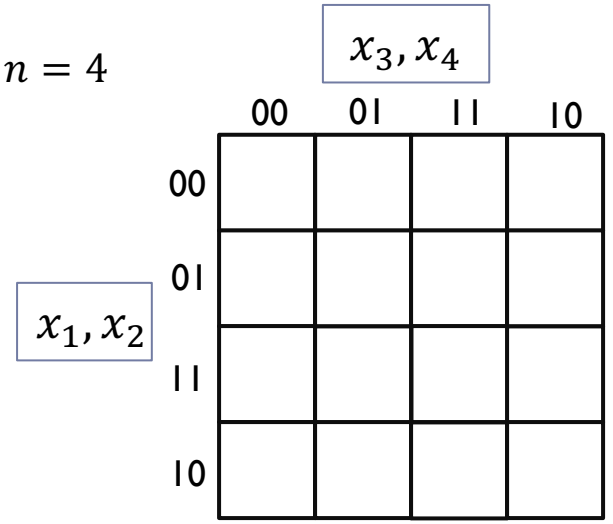
Vaja 5 Karnaughjev diagram, Grayeva koda, Minimizacija

Karnaughjevi diagrami (K-map)

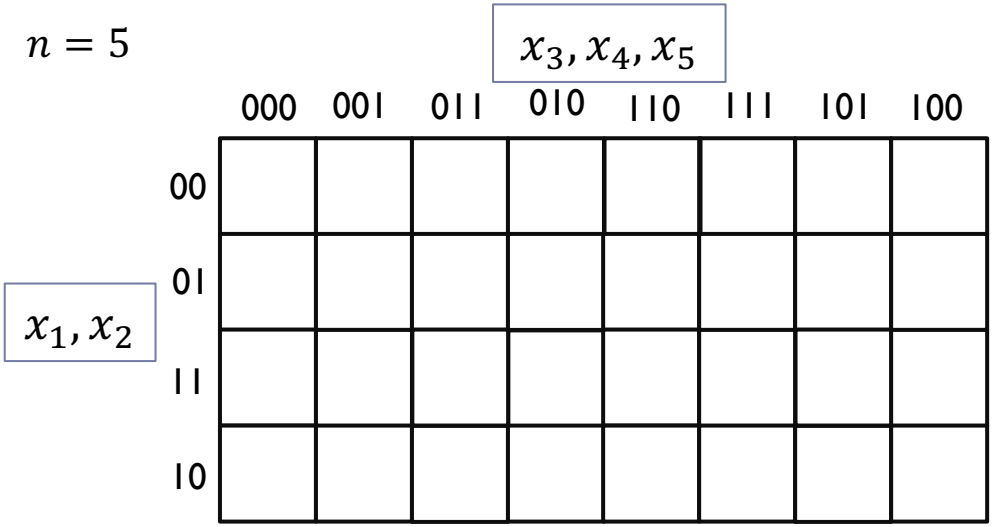
$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$

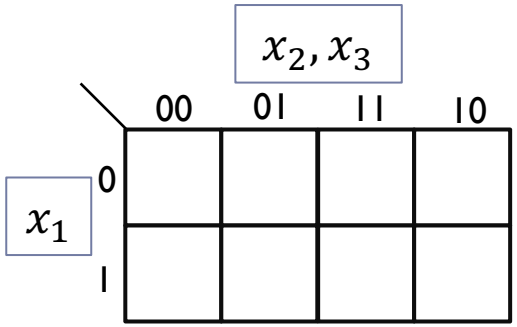


Sosednost se nanaša na sosednost med polji.

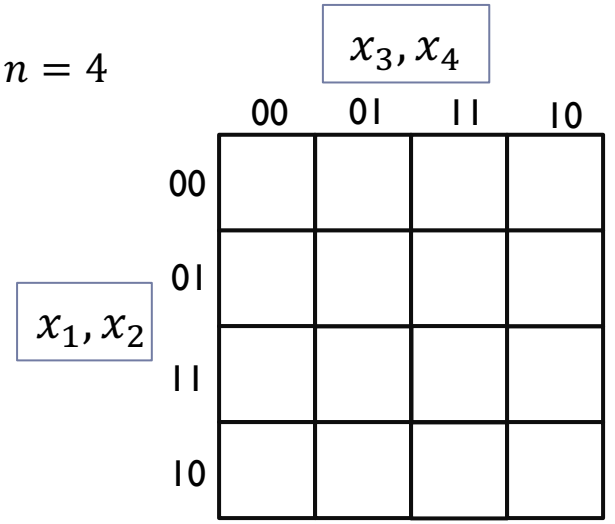


Karnaughjevi diagrami (K-map)

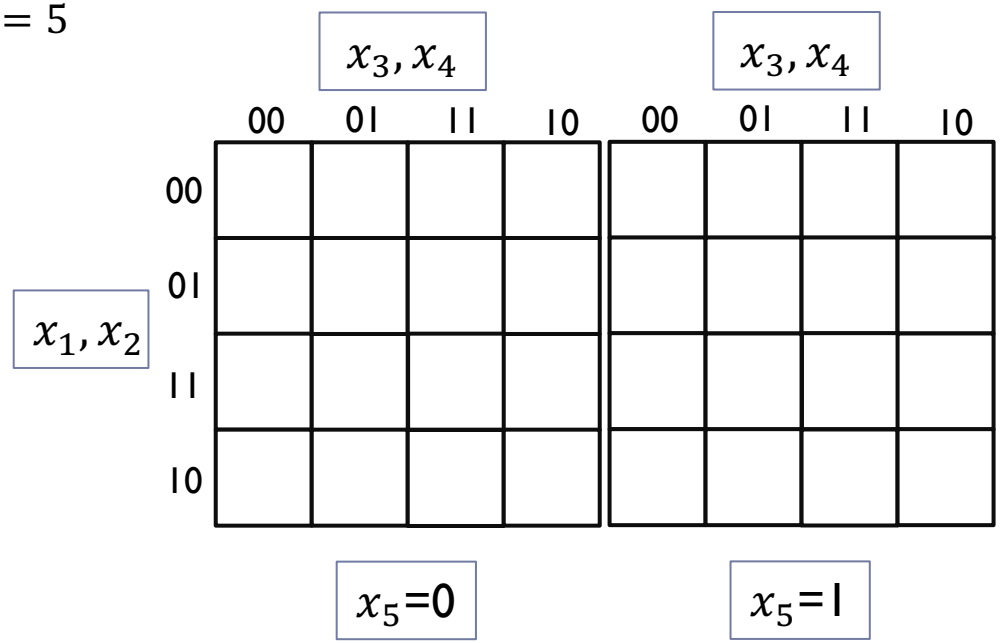
$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$



Sosednost se nanaša na sosednost med polji.



Grayeva koda (zapis iz binarne kode)

- Vsaka naslednja koda se od prejšnje razlikuje samo na enem mestu za eno negacijo.
- Določanje Grayeve kode iz dvojiške kode.

n=1 (1- bitna Grayeva koda)

$g_0 = b_0$

b_0	g_0
0	0
1	1

n=2 (2- bitna Grayeva koda)

a)
$g_1 = b_1$

b)
zgornja polovica za g_0 je enaka g_0 za $n = 1$

c)
spodnja polovica za g_0 je navzdol prepognjena g_0

	b_1	b_0	g_1	g_0
0	0	0	0	
1	0	1	0	
2	1	0	1	
3	1	1	1	

	b_1	b_0	g_1	g_0
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	1	0	1	
3	1	1	1	

	b_1	b_0	g_1	g_0
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	1	0	1	1
3	1	1	1	0

n=3 (3- bitna Grayeva koda)

g_1	g_0
0	0
0	1
1	1
1	0

a) $g_2 = b_2$

	b_2	b_1	b_0	g_2	g_1	g_0
0	0	0	0	0		
1	0	0	1	0		
2	0	1	0	0		
3	0	1	1	0		
4	1	0	0	1		
5	1	0	1	1		
6	1	1	0	1		
7	1	1	1	1		

b)
zgornja polovica za $g_1 g_0$ je enaka $g_1 g_0$ za $n = 2$

	b_2	b_1	b_0	g_2	g_1	g_0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	1
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1		
5	1	0	1	1		
6	1	1	0	1		
7	1	1	1	1		

c)
spodnja polovica sta navzdol prepognjeni $g_1 g_0$

	b_2	b_1	b_0	g_2	g_1	g_0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	1
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	0
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	1	0	1
7	1	1	1	1	0	0

Minimizacija preklopnih funkcij

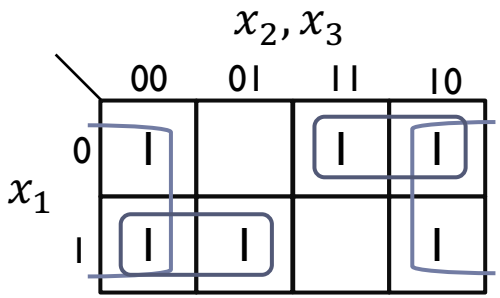
- Zapis MDNO (minimalna disjunktivna normalna oblika). Postopek vključuje:
  1. Vpis preklopne funkcije v Karnaughjev diagram.
  2. Združevanje funkcijskih vrednosti 1 po pravilu sosednosti v krajše konjunkcije (glavni vsebovalniki) tako, da je vsaka enica upoštevana vsaj enkrat, lahko je tudi večkrat.
  3. Iščemo najmanjši nabor pokritij, da dobimo potrebne glavne vsebovalnike.
  4. MDNO je disjunktivna povezava potrebnih glavnih vsebovalnikov.
- Zapis MKNO (minimalna konjunktivno normalna oblika). Postopek vključuje:
  1. Preklopno funkcijo negiramo in vpišemo v Karnaughjev diagram.
  2. Določimo MDNO negirane funkcije.
  3. MDNO negirane funkcije še enkrat negiramo in dobimo MKNO izhodiščne funkcije.
- Zapis MNO (minimalna konjunktivno normalna oblika). Postopek vključuje:
  1. Določimo MDNO.
  2. Določimo MKNO.
  3. Določimo kompleksnost MDNO in MKNO (število operatorjev, število vhodov).
  4. MNO je tista, ki ima manjše število operatorjev; če je število operatorjev enako, je MNO tista, ki ima manjše število vhodov.



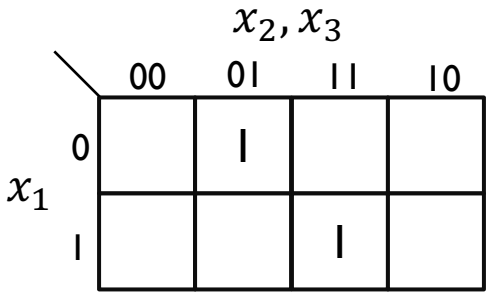
Primer 1: Minimizacija preklopne funkcije

- Primer:

i	x_1	x_2	x_3	f_A
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0



$$f_A = \overline{x_3} \vee \overline{x_1}.x_2 \vee x_1.\overline{x_2}$$



$$\overline{f_A} = \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 \vee x_1.x_2.x_3$$

$$\overline{\overline{f_A}} = \overline{\overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3 \vee x_1.x_2.x_3} =$$
$$f_A = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}).(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

MDNO: $f_A = \overline{x_3} \vee \overline{x_1}.x_2 \vee x_1.\overline{x_2}$ (3, 7)

MKNO: $f_A = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}).(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$ (3, 8)

MNO = MDNO (obe obliki imata enako število vrat, a MDNO ima manj vhodov)



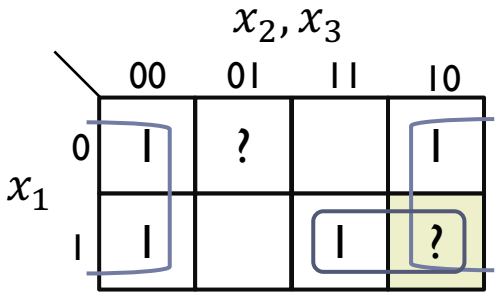
Primer 2: Minimizacija nepopolne preklopne funkcije

- Določeni vhodni vektorji nimajo določene funkcijske vrednosti

  (Don‘t care: ? ali X)

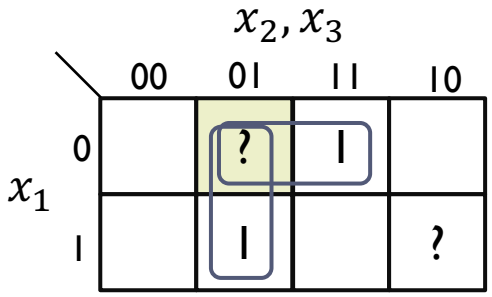
- Glavne vsebovalnike določimo tako, da jih lahko pokrijemo, to je postavimo na 1 ali pa ne in jih postavimo na 0.
- Določimo čimkrajšo obliko zapisa.

i	x_1	x_2	x_3	f_B
0	0	0	0	1
1	0	0	1	?
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	?
7	1	1	1	1



$f_B = \overline{x_3} \vee x_1 . x_2$

MDNO: (2, 4)



$\overline{f_B} = \overline{x_1} . x_2 \vee \overline{x_2} . x_3$

$\overline{\overline{f_B}} = \overline{\overline{x_1} . x_2 \vee \overline{x_2} . x_3} =$

$f_B = (x_1 \vee \overline{x_2}) . (x_2 \vee \overline{x_3})$

MKNO: (3, 6)

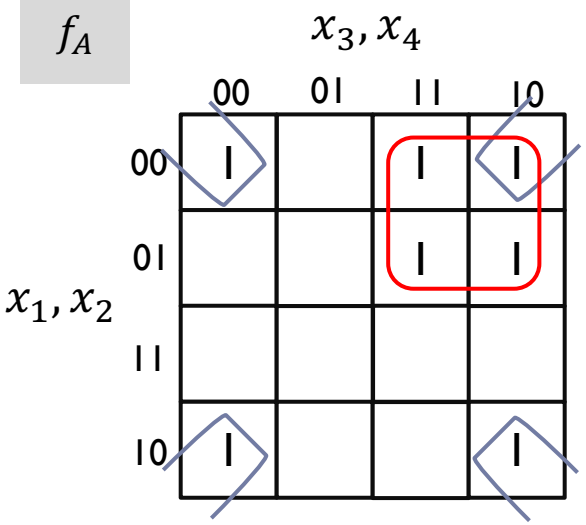
MNO = MDNO



Primer 3: MDNO preklopnih funkcij ($n = 4$)

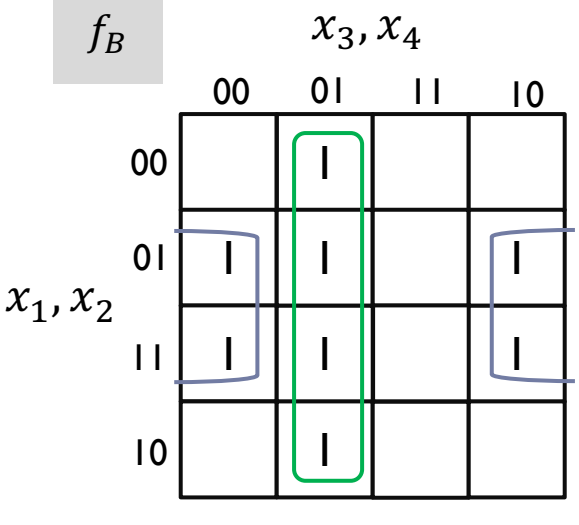
- V Karnaughjevem diagramu sta podani logični funkciji:
  - $f_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{V}^4\,(0, 2, 3, 6, 7, 8, 10)$
  - $f_B(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{V}^4\,(1, 4, 5, 6, 9, 12, 13, 14)$
- Zapišite MDNO.

f_A

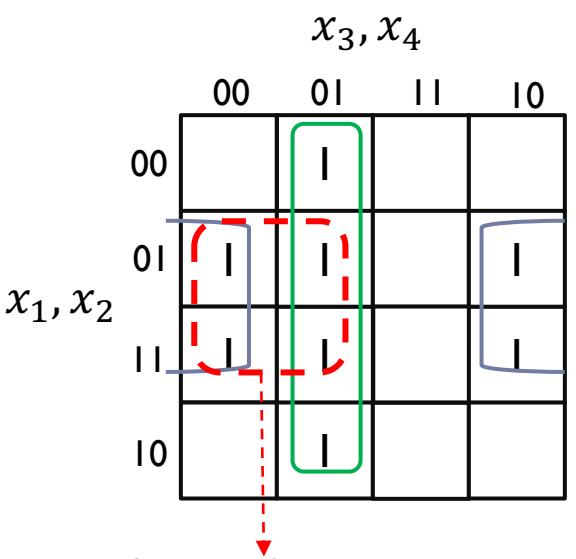


$f_A = \overline{x_2}.\overline{x_4}\ \mathrm{V}\ \overline{x_1}.x_3$

f_B



$f_B = \overline{x_3}.x_4\ \mathrm{V}\ x_2.\overline{x_4}$



Za funkcijo f_B obstaja glavni vsebovalnik $x_2.\overline{x_3}$, ki ni potreben, ker so vse funkcijske vrednosti 1 že upoštevane v drugih dveh.

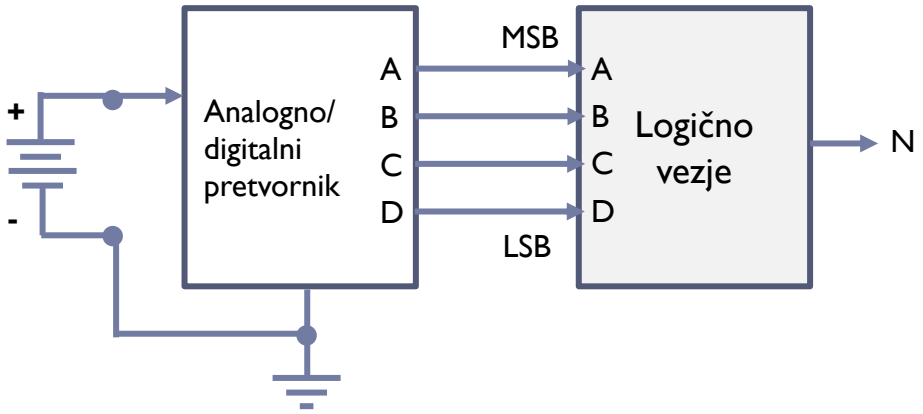
Naloge

- Za podano funkcijo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{V}^4\ (0, 1, 4, 5, 11, 15)$ določite MNO s pomočjo Karnaugherjevega diagrama.

- Izdelati želite logično vezje za določanje napetostnega nivoja 12-V pomnilniške baterije. Enosmerno napetost baterije preko analogno-digitalni pretvornika pretvorite v 4-bitno binarno število (ABCD), ki ustreza napetosti s korakom 1 V, pri čemer je izhod A najbolj pomemben bit. Binarni izhodi pretvornika nato pripeljemo na logično vezje, ki vrne vrednost 1 (HIGH), kadar je napetost baterije večja od 6 V, sicer na izhodu N dobimo 0 (LOW). Ko binarni izhod preseže napetost baterije, je izhod N nedoločen (?).

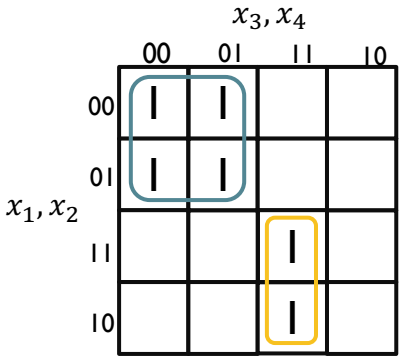
Za opisano vezje:

1. Zapišite pravilnostno tabelo
2. Zapišite PDNO v skrajšani obliki
3. Določite MNO
4. MNO realizirajte v logisimu in na protoboardu



Naloga: Rešitev

1) MDNO

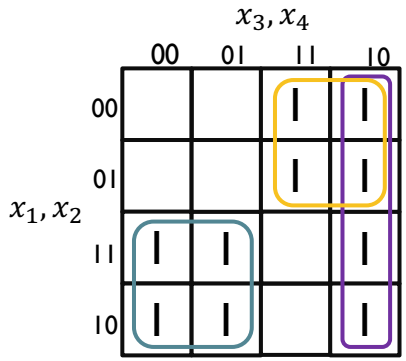


$$f = \overline{x_1 x_3} \vee x_1 x_3 x_4$$

MDNO: (3, 7)

3) MNO = MDNO

2) MKNO



$$\bar{f} = \overline{x_1} x_3 \vee x_1 \overline{x_3} \vee x_3 \overline{x_4}$$

$$\bar{\bar{f}} = \overline{\overline{x_1} x_3 \vee x_1 \overline{x_3} \vee x_3 \overline{x_4}} =$$

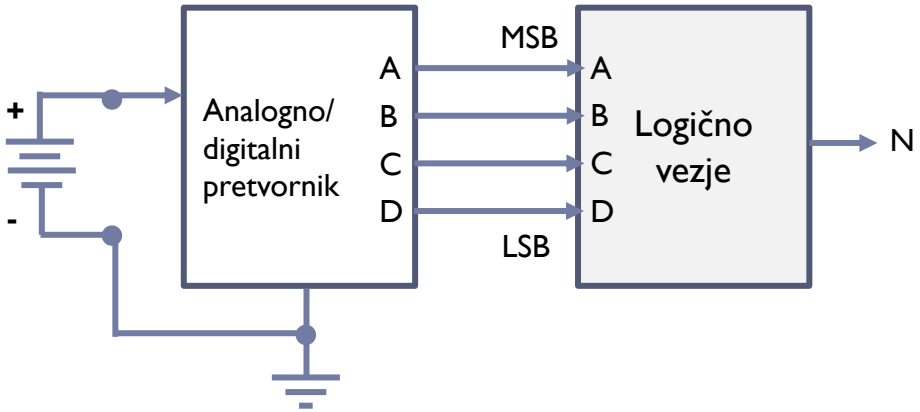
$$f = (x_1 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_3)(\overline{x_3} \vee x_4)$$

MKNO: (4, 9)



Naloga: Rešitev

1) Blok shema

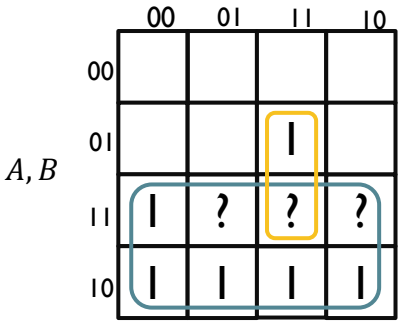


2) Pravilnostna tabela

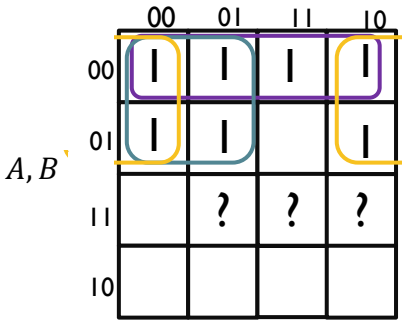
i	A	B	C	D	N
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	?
14	1	1	1	0	?
15	1	1	1	1	?

3) PDNO: $N(A,B,CD) = \vee^4 (7,8,9,10,11,12) V_?^4 (13,14,15)$

4) MDNO



5) MKNO



$N = A \vee BCD$

$N = (A \vee B)(A \vee C)(A \vee D)$

6) MNO = MDNO

Dodatna naloga: Primerjalnik

- Podane so zahteve za izvedbo dvo-bitnega primerjalnika števil, če so podani:
  - Vhodi: $X = (x_1, x_0),\ Y = (y_1, y_0)$
  - Izhodi:

    $p_1 = 0, p_0 = 0$, če je $X = Y$

    $p_1 = 0, p_0 = 1$, če je $X < Y$

    $p_1 = 1, p_0 = 0$, če je $X > Y$
- Naloge:
  1. Funkciji p_1 in p_0 zapišite v pravilnostno tabelo.
  2. Funkciji p_1 in p_0 zapišite v PDNO in v PKNO v skrajšani obliki
  3. Zapišite MDNO in MKNO za funkciji p_1 in p_0
  4. Določite MNO (minimalna normalna oblika)
  5. Realizirajte primerjalnik v logisimu



Dodatna naloga: Rešitev

i	x_1	x_0	y_1	y_0	p_1	p_0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
2	0	0	1	0	0	1
3	0	0	1	1	0	1
4	0	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	1
7	0	1	1	1	0	1
8	1	0	0	0	1	0
9	1	0	0	1	1	0
10	1	0	1	0	0	0
11	1	0	1	1	0	1
12	1	1	0	0	1	0
13	1	1	0	1	1	0
14	1	1	1	0	1	0
15	1	1	1	1	0	0

PDNO:

$$p_1(x_1, x_0, y_1, y_0) = \mathrm{V}^4\,(4, 8, 9, 12, 13, 14)$$

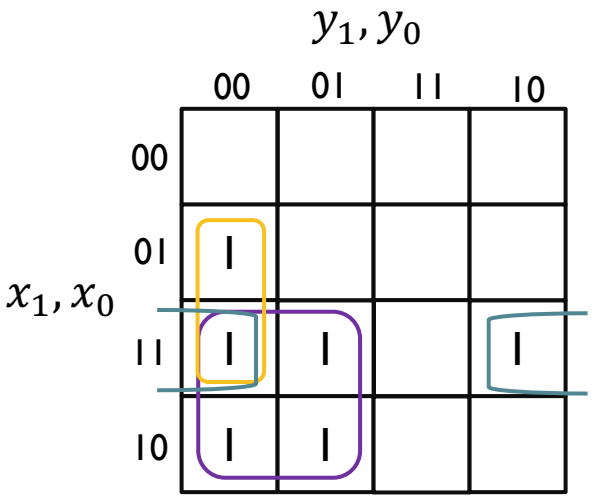
$$p_0(x_1, x_0, y_1, y_0) = \mathrm{V}^4\,(1, 2, 3, 6, 7, 11)$$

PKNO:

$$p_1(x_1, x_0, y_1, y_0) = \&^4(0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15)$$

$$p_0(x_1, x_0, y_1, y_0) = \&^4(0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15)$$

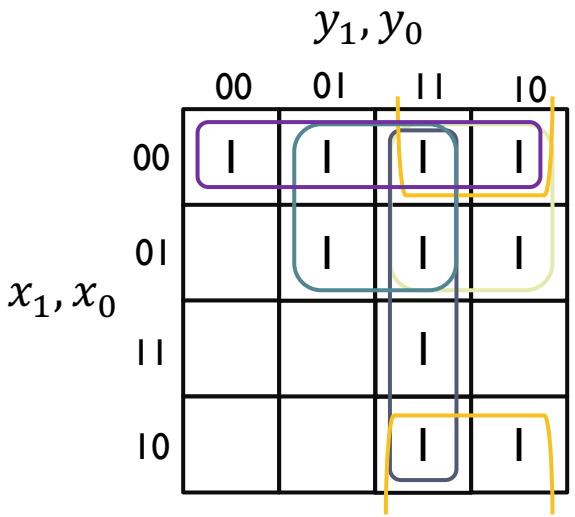
Dodatna naloga: Rešitev



MDNO:

$p_1 = x_1\overline{y_1} \vee x_1x_0\overline{y_0} \vee x_0\overline{y_1y_0}$

(4, 11)



MKNO:

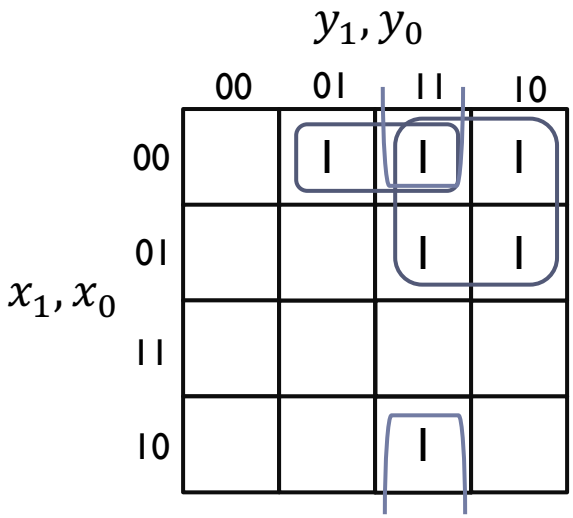
$p_1 = (x_1 \vee x_0)(x_1 \vee \overline{y_0})(x_1 \vee \overline{y_1})$
$(\overline{y_1} \vee \overline{y_0})(x_1 \vee \overline{y_1})$

(5,15)

MNO = MDNO



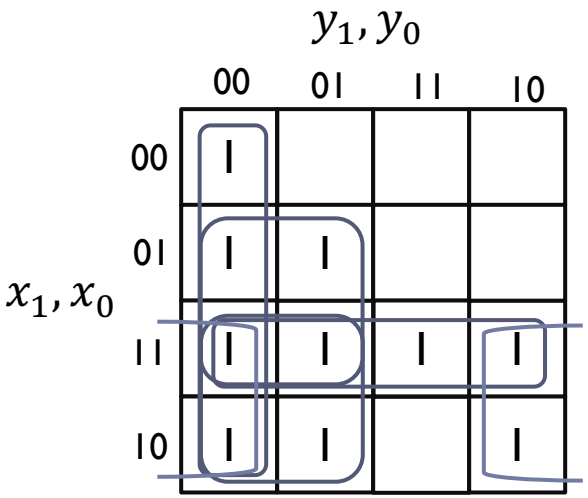
Dodatna naloga: Rešitev



MDNO:

$p_0 = \overline{x_1} y_1 \vee \overline{x_1 x_0} y_0 \vee \overline{x_0} y_1 y_0$

(4, 11)



MKNO:

$p_0 = (y_1 \vee y_0)(\overline{x_0} \vee y_1)(\overline{x_1} \vee y_1)$
$(\overline{x_1} \vee \overline{x_0})(\overline{x_1} \vee y_0)$

(6,15)

MNO = MDNO



Logisim vezje za p_1 in p_0: MDNO

